Cálculo Diferencial e Integral I

1.º Teste (Versão A) 11 de Abril de 2015

LEAN, MEAer, MEMec, MEBiol, MEAmbi

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(5,0) **I.** Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x : \frac{x^2-1}{|x-1|} \geq 0 \right\}, \qquad B = [-2,3], \qquad C = (A \cap B).$$

a) Identifique o conjunto A e mostre que $C = [-2,-1] \cup]1,3]$.

b) Determine, se existirem, $\inf C$, $\sup C$, $\max C$, $\sup\,(C \setminus \mathbb{Q})$ e $\min\,(C \setminus \mathbb{Q})$.

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Qualquer sucessão crescente de termos em C é convergente (em $\mathbb{R}$).

(ii) Qualquer sucessão decrescente de termos em C tem limite em C.

(iii) Existe uma sucessão (u_n) de termos em C tal que $\lim u_n = 0$.

d) Seja (b_n) uma sucessão crescente de termos em B. Indique o supremo e o ínfimo do conjunto dos termos da sucessão (b_n).

(2,0) **II.** Por indução, mostre que, para qualquer número natural $n \geq 2$,

$$(n+1)! \geq 2^{2(n-1)}.$$

(4,5) **III.** Calcule, ou mostre que não existem (em $\overline{\mathbb{R}}$), os seguintes limites de sucessões:

a) $\lim \dfrac{n^2+2n-1}{n^3+3}$. b) $\lim \dfrac{6^n+n^2+2}{n!+3}$. c) $\lim \dfrac{(-1)^n n^2+1}{2n^2+5}$. d) $\lim \sqrt[n]{\dfrac{n-3}{n^2+n-1}}$.

(6,0) **IV.** Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -e^{\frac{1}{2x}}, & \text{se } x < 0, \\ \log \dfrac{1}{1+x^2}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

a) Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Justifique que f é contínua em todo o seu domínio e mostre que é prolongável por continuidade ao ponto 0.

c) Calcule a função derivada f' e determine os intervalos de monotonia da função f.

d) Sendo $\tilde{f}$ o prolongamento contínuo de f ao ponto zero, justifique que $\tilde{f}$ tem máximo e mínimo em qualquer intervalo da forma $[-a,a]$ com $a > 0$. Indique, justificando, o valor de $\max\limits_{x \in [-a,a]} \tilde{f}(x)$.

(2,5) **V.** Seja φ uma função real definida e contínua em $[1,+\infty[$, tal que

$$\varphi(1) = 2 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0.$$

Prove que existe máximo da função φ.