Cálculo Diferencial e Integral I

Exame, 1º Teste, 2º Teste (Versão B)   29 de Junho de 2015

LEAN, MEAer, MEMec, MEBiol, MEAmbi

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

Para realizar o exame responda a todas as questões. Para realizar o 1º Teste responda aos grupos **I** a **V**. Para realizar o 2º teste responda aos grupos **VI** a **XI**.

1º Teste

(3,5) **I.** Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x : \ 2x^2 \geq |x-1| \ \right\}, \qquad B = \left\{x : \log\left(\frac{x}{e}\right) > 0\right\}.$$

a) Mostre que $A \cap B =]e, +\infty[$.

b) Diga, justificando, se cada uma das proposições seguintes é verdadeira ou falsa:

i) Qualquer sucessão decrescente de termos em $A \cap B$ é convergente (em $\mathbb{R}$).

ii) Toda a sucessão de termos em $A \cap B$ tem pelo menos um sublimite em $\overline{\mathbb{R}}$.

iii) Se $f : A \cap B \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ então f é limitada.

(3,5) **II.** Considere uma sucessão de termo geral b_n definida por

$$\begin{cases} b_1 = 2, \\ b_{n+1} = \dfrac{b_n}{1-b_n}, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Mostre, por indução, que $b_n < 0$ para qualquer número natural $n \geq 2$.

b) Mostre que a sucessão (b_n) é crescente (para $n \geq 2$).

c) Justifique que a sucessão é convergente e calcule $\lim b_n$.

(4,0) **III.** Calcule, caso existam em $\overline{\mathbb{R}}$,

a) $\lim \dfrac{3n(n^2+1)+1}{n(n+1)^2+4}$ b) $\lim \dfrac{e^{\operatorname{arctg} n}}{n!}$ c) $\lim \dfrac{2^n+5n^2}{1+5^n+n^5}$ d) $\lim \left(\dfrac{1+n}{2n}\right)^{n+1}$.

(6,5) **IV.** Sejam $\beta \in \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$g(x) = \begin{cases} -x\, e^{(x-\beta)}, & \text{se } x < 0, \\ x(x-e), & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

a) Mostre que, para qualquer β, g é contínua em $x = 0$.

b) Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

c) Calcule β de modo a que g seja diferenciável em $x = 0$. Para esse valor de β determine a função derivada g'.

d) Determine, justificando, os intervalos de monotonia, os extremos locais e o contradomínio da função g.

(2,5) **V.** Sejam $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ e $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, diferenciável em $]a,b[$, tal que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ e $\varphi(t) \neq 0$ para qualquer $t \in]a,b[$. Seja ainda $\psi(t) = \varphi'(t)/\varphi(t)$, para todo o $t \in]a,b[$. Mostre que $\psi\left(]a,b[\right) = \mathbb{R}$ (para cada $k \in \mathbb{R}$, aplique, justificando, o Teorema de Rolle à função $\varphi(t)e^{-kt}$ em $[a,b]$).

2º Teste

(3,0) **VI.** Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0}\,(1-4x)^{\frac{1}{2x}}\ , \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 0^+}\,(\operatorname{arcsen} x)^{\frac{1}{x}}\,.$$

(4,0) **VII.** a) Calcule, usando a substituição $t = \log x$, uma primitiva da função

$$\frac{\log x}{x(\log^2 x + 1)}$$

b) Determine a única função $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$ que verifica as condições:

$$\forall_{x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}} \quad f'(x) = \log(x+2)^2 \quad \text{e} \quad f(-3) = 0,\ f(-1) = 2\,.$$

(2,5) **VIII.** Calcule a área da região plana limitada pelas linhas de equação:

$$x = 0\,, \qquad x = -2y\,, \qquad y = \frac{1}{1-x}\,.$$

(3,5) **IX.** Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e considere $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$\psi(t) = \int_{t^3}^{t} e^{t^2}\, g(x)\, dx\,.$$

a) Justifique que ψ é uma função diferenciável e calcule ψ'.

b) Mostre que se g é uma função par então ψ é uma função ímpar.

(4,5) **X.** a) Determine, justificando, a natureza das séries seguintes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi n}{4n+1}\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+1}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{3+n!}.$$

b) Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a seguinte série de potências converge absolutamente, simplesmente ou diverge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n+2}\,.$$

(2,5) **XI.** Sejam f e g funções integráveis em $[a,b]$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$. Prove que se $f(x) \leq g(x)$ para qualquer $x \in [a,b]$, então $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ (justifique que $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ e use este resultado na demonstração).