# Cálculo Diferencial e Integral I

Exame, 1º Teste, 2º Teste (Versão A)    29 de Junho de 2015

**LEAN, MEAer, MEMec, MEBiol, MEAmbi**

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

Para realizar o exame responda a todas as questões. Para realizar o 1º Teste responda aos grupos **I** a **V**. Para realizar o 2º teste responda aos grupos **VI** a **XI**.

## 1º Teste

(3,5) **I.** Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x : \ 2x^2 \geq |x-1| \ \right\}, \qquad B = \left\{x : \log\left(\frac{x}{\pi}\right) > 0\right\}.$$

a) Mostre que $A \cap B = ]\pi, +\infty[$.

b) Diga, justificando, se cada uma das proposições seguintes é verdadeira ou falsa:

i) Toda a sucessão de termos em $A \cap B$ tem pelo menos um sublimite (em $\mathbb{R}$).

ii) Qualquer sucessão monótona de termos em $A \cap B$ é convergente (em $\mathbb{R}$).

iii) Se $f : A \cap B \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ então $f$ é limitada.

(3,5) **II.** Considere uma sucessão de termo geral $a_n$ definida por

$$\begin{cases} a_1 = -2, \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n}, \ \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Mostre, por indução, que $a_n > 0$ para qualquer número natural $n \geq 2$.

b) Mostre que a sucessão $(a_n)$ é decrescente (para $n \geq 2$).

c) Justifique que a sucessão é convergente e calcule $\lim a_n$.

(4,0) **III.** Calcule, caso existam em $\overline{\mathbb{R}}$,

a) $\lim \dfrac{2n(n+1)^2+5}{3n(n^2+1)+6}$  b) $\lim \dfrac{\operatorname{arctg} n!}{n}$  c) $\lim \dfrac{3^n+6n}{1+2^n+n^2}$  d) $\lim \left(1+\dfrac{3}{n!}\right)^{n!+1}$.

(6,5) **IV.** Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} ex(1+x), & \text{se } x < 0, \\ x\, e^{(\alpha - x)}, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

a) Mostre que, para qualquer $\alpha$, $f$ é contínua em $x = 0$.

b) Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Calcule $\alpha$ de modo a que $f$ seja diferenciável em $x = 0$. Para esse valor de $\alpha$ determine a função derivada $f'$.

d) Determine, justificando, os intervalos de monotonia, os extremos locais e o contradomínio da função $f$.

(2,5) **V.** Sejam $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, diferenciável em $]a,b[$, tal que $g(a) = g(b) = 0$ e $g(x) \neq 0$ para qualquer $x \in ]a,b[$. Mostre que a função $h : ]a,b[ \to \mathbb{R}$, dada por $h(x) = g'(x)/g(x)$ é sobrejectiva (para cada $k \in \mathbb{R}$, aplique, justificando, o Teorema de Rolle à função $g(x)e^{-kx}$ em $[a,b]$).

## 2º Teste

(3,0) **VI.** Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}} \ , \qquad \text{b) } \lim_{x\to+\infty} \left(\operatorname{arcsen} \frac{1}{x}\right)^{x} .$$

(4,0) **VII.** a) Calcule, usando a substituição $t = \log x$, uma primitiva da função

$$\frac{1}{x + x\log^2 x}$$

b) Determine a única função $g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ que verifica as condições:

$$\forall_{x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}} \quad g'(x) = \log(1+x)^2 \quad \text{e} \quad g(0) = 1,\ g(-2) = 0 \ .$$

(2,5) **VIII.** Calcule a área da região plana limitada pelas linhas de equação:

$$x = 0\,, \qquad x = 2y\,, \qquad y = \frac{1}{1+x}\,.$$

(3,5) **IX.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e considere $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$\varphi(x) = \int_x^{x^3} \cos(x^2)\, f(t)\, dt\,.$$

a) Justifique que $\varphi$ é uma função diferenciável e calcule $\varphi'$.

b) Mostre que se $f$ é uma função ímpar então $\varphi$ é uma função par.

(4,5) **X.** a) Determine, justificando, a natureza das séries seguintes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{n^2+1}\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3(n+1)}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{1+n!}.$$

b) Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a seguinte série de potências converge absolutamente, simplesmente ou diverge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n+3}\,.$$

(2,5) **XI.** Sejam $f$ e $g$ funções integráveis em $[a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$. Prove que se $f(x) \leq g(x)$ para qualquer $x \in [a, b]$, então $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ (justifique que $\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f$ e use este resultado na demonstração).