Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste (Versão B) 5 de Janeiro de 2015

Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(3,0) **I.** Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1+} (\log x)^{(x-1)}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0-} \frac{e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{1}{x+1}\int_0^{\log(2+x)} e^{\operatorname{tg} t}\,dt$.

(4,0) **II.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $\dfrac{2\cos x}{4+\operatorname{sen}^2 x}$, b) $x^2 \log\sqrt{x}$, c) $\dfrac{e^x}{e^{2x}-1}$.

(3,0) **III.** Calcule a área da região do plano limitada pelas parábolas de equações $x = y^2$ e $x^2 = -y$.

(3,5) **IV.** Seja $f \in C^1(\mathbb{R})$ uma função tal que $f(e) = 0$ e que tem em $x = e$ um extremo local. Seja $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(x) = \int_{\log x}^{e^x} f(y)\,dy\,.$$

Calcule ϕ' e ϕ'' e mostre que $\phi'(1) + \phi''(1) = -f'(0)$.

(3,5) **V.** Estude quanto à natureza (convergência simples, absoluta e divergência) as séries seguintes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+2}{n^2}$, *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^5+1}$, *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!+n^{10}}$.

(3,0) **VI.** a) Sendo $\varphi \in C(\mathbb{R})$ e ϕ o seu integral indefinido com origem no ponto 2, mostre que

$$\max_{t\in I} |\phi(t)| \le 3 \max_{t\in I} |\varphi(t)|$$

onde $I = [2, 5]$.

b) Aplicando a Regra de Barrow prove que, sendo $g \in C(\mathbb{R})$ e $a, c, d \in \mathbb{R}$,

$$\int_c^d g(u)\,du = \int_{a-d}^{a-c} g(a-u)\,du\,.$$

Resolução

I. a) Como $(\log x)^{x-1} = e^{(x-1)\log(\log x)}$ consideramos primeiro

$$\lim_{x\to 1^+} (x-1)\log(\log x)$$

Trata-se de uma "indeterminação" $0\cdot\infty$ que avaliamos usando regra de Cauchy sucessivamente da seguinte forma

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\log(\log x)}{1/(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x\log x}}{-1/(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^+} -\frac{(x-1)^2}{x\log x} = \lim_{x\to 1^+} -\frac{2(x-1)}{\log x + 1} = 0.$$

Daí que

$$\lim_{x\to 1^+} (\log x)^{x-1} = e^0 = 1.$$

b) Notando que $x - \frac{1}{x} \to +\infty$ quando $x \to 0^-$ obtemos

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2} = +\infty.$$

c) Quando $x \to -1$ temos $\log(2+x) \to 0$ pelo que o integral tende para 0 pela continuidade do integral indefinido. Assim sendo estamos na presença de uma "indeterminação" $0/0$ que tentaremos resolver usando regra de Cauchy[1]. Note-se que a diferenciabilidade do integral vai ser assegurada pelo teorema fundamental do cálculo e pelo teorema de derivação da função composta pois a função $t \mapsto e^{\operatorname{tg} t}$ é contínua em $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ e $x \mapsto \log(2+x)$ é diferenciável em $]-2, +\infty[$. Sendo assim

$$\lim_{x\to -1} \frac{1}{x+1} \int_0^{\log(2+x)} e^{\operatorname{tg} t}\, dt = \lim_{x\to -1} \frac{e^{\operatorname{tg}(\log(2+x))}}{2+x} = \frac{e^{\operatorname{tg}(\log(2-1))}}{2-1} = 1.$$

II. a)

$$\int \frac{2\cos x}{4+\operatorname{sen}^2 x}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{\cos x}{1+\left(\frac{\operatorname{sen} x}{2}\right)^2}\, dx = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{2}\right).$$

b)

$$\int x^2 \log\sqrt{x}\, dx = \frac{1}{2}\int x^2 \log x\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\log x - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}\, dx\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\log x - \frac{x^3}{9}\right).$$

c) Usando a mudança de variável $e^x = t$ e decomposição em fracções simples obtemos

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}\, dx = \int \frac{t}{t^2-1}\frac{1}{t}\, dt = \int \frac{1}{t^2-1}\, dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\, dt$$
$$= \frac{1}{2}\left(\log|t-1| - \log|t+1|\right) = \frac{1}{2}\left(\log|e^x-1| - \log(e^x+1)\right).$$

III.

$$\int_0^1 -x^2 + \sqrt{x}\, dx = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

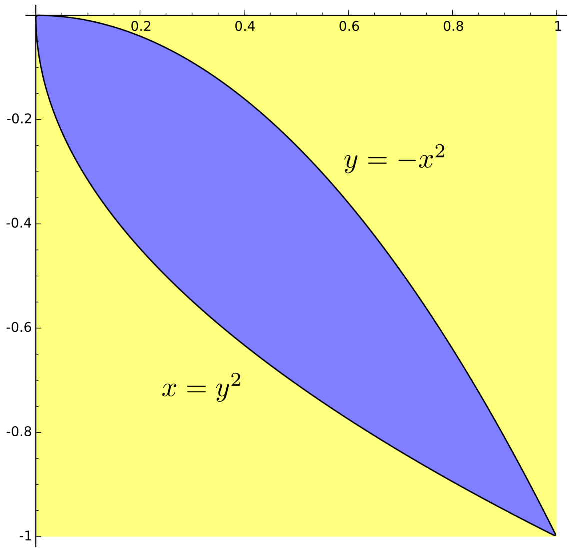

Figura 1: A região de que se pretende calcular a área.

IV. Sendo f diferenciável e com um extremo em 0 devemos ter $f'(e) = 0$.

Usando o teorema fundamental do cálculo e o teorema de derivação da função composta obtemos

$$\phi'(x) = e^x f(e^x) - \frac{1}{x} f(\log x)$$
$$\phi''(x) = e^{2x} f'(e^x) + e^x f(e^x) - \frac{1}{x^2} f'(\log x) + \frac{1}{x^2} f(\log x),$$

donde em particular

$$\phi'(1) = ef(e) - f(\log 1) = -f(0),$$
$$\phi''(1) = ef'(e) + ef(e) - f'(\log 1) + f(\log 1) = f(0) - f'(0),$$

e daí segue a igualdade pretendida.

V. a) Como

$$0 < \frac{\sqrt{n}+2}{n^2} \leq \frac{3\sqrt{n}}{n^2} = \frac{3}{n^{3/2}}$$

a convergência (absoluta) decorre por comparação com a série convergente $\sum \frac{3}{n^{3/2}}$.

b) Como

$$0 \leq \frac{1+(-1)^n}{n^5+1} \leq \frac{2}{n^5}$$

a convergência (absoluta) decorre por comparação com a série convergente $\sum \frac{2}{n^5}$.

c) Seja $a_n = (-1)^n \dfrac{2^n}{n! + n^{10}}$. Então

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{2(n! + n^{10})}{(n+1)! + (n+1)^{10}} = \frac{2(1 + n^{10}/n!)}{n+1+(n+1)^{10}/n!} = 0 < 1.$$

Daí que a série seja absolutamente convergente.

VI. a) Antes do mais note-se que ambos os máximos existem por aplicação do teorema de Weierstrass a $|\varphi|$, que é contínua em $[2, 5]$, e a $|\phi|$, que também é contínua (por continuidade do integral indefinido e do módulo). Adicionalmente, usando a monotonia do integral, tem-se, para qualquer $t \in I = [2, 5]$,

$$|\phi(t)| = \left| \int_2^t \varphi(x)\, dx \right| \leq \int_2^t |\varphi(x)|\, dx \leq \int_2^t \max_{t \in I} |\varphi(t)|\, dx \leq (t-2) \max_{t \in I} |\varphi(t)| \,.$$

Assim,

$$\max_{t \in I} |\phi(t)| \leq 3 \max_{t \in I} |\varphi(t)| \,.$$

b) Designe-se por G uma primitiva de g (sendo contínua, é primitivável). Como $\frac{d}{du}(G(a-u)) = -g(a-u)$ a função $-G(a-u)$ é uma primitiva de $g(a-u)$. Daí que aplicando regra de Barrow aos dois lados da identidade a demonstrar obtém-se

$$\int_c^d g(u)\, du = G(d) - G(c),$$

$$\int_{a-d}^{a-c} g(a-u)\, du = -G(a-(a-c)) - (-G(a-(a-d))) = G(d) - G(c).$$