

Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste (Versão B) 5 de Janeiro de 2015

Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(3,0) **I.** Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1^+} (\log x)^{(x-1)}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{x-\frac{1}{x}}}{x^2}, \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} \int_0^{\log(2+x)} e^{\text{tg } t} dt.$$

(4,0) **II.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a) } \frac{2 \cos x}{4 + \sin^2 x}, \quad \text{b) } x^2 \log \sqrt{x}, \quad \text{c) } \frac{e^x}{e^{2x} - 1}.$$

(3,0) **III.** Calcule a área da região do plano limitada pelas parábolas de equações $x = y^2$ e $x^2 = -y$.

(3,5) **IV.** Seja $f \in C^1(\mathbb{R})$ uma função tal que $f(e) = 0$ e que tem em $x = e$ um extremo local. Seja $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(x) = \int_{\log x}^{e^x} f(y) dy.$$

Calcule ϕ' e ϕ'' e mostre que $\phi'(1) + \phi''(1) = -f'(0)$.

(3,5) **V.** Estude quanto à natureza (convergência simples, absoluta e divergência) as séries seguintes:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n} + 2}{n^2}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n^5 + 1}, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n! + n^{10}}.$$

(3,0) **VI.** a) Sendo $\varphi \in C(\mathbb{R})$ e ϕ o seu integral indefinido com origem no ponto 2, mostre que

$$\max_{t \in I} |\phi(t)| \leq 3 \max_{t \in I} |\varphi(t)|$$

onde $I = [2, 5]$.

b) Aplicando a Regra de Barrow prove que, sendo $g \in C(\mathbb{R})$ e $a, c, d \in \mathbb{R}$,

$$\int_c^d g(u) du = \int_{a-d}^{a-c} g(a-u) du.$$