

## Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste (Versão A) 5 de Janeiro de 2015

### Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

---

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

---

(3,0) **I.** Calcule, se existirem em  $\overline{\mathbb{R}}$ , os seguintes limites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\log x)^{\frac{1}{2x}}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x+\frac{1}{x}}}{x}, \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^{2 \log(x+1)} e^{\cos t} dt.$$

(4,0) **II.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a) } \frac{e^x}{e^{2x} + 4}, \quad \text{b) } \frac{\log(2x)}{\sqrt{2x}}, \quad \text{c) } \frac{\log x}{x(\log x + 1)}.$$

(3,0) **III.** Calcule a área da região do plano limitada pelas parábolas de equações  $y = x^2$  e  $x = -y^2$ .

(3,5) **IV.** Sejam  $h \in C^1(\mathbb{R})$  e  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\varphi(x) = \int_x^{x^3} h(t) dt.$$

Supondo  $h(0) = 0$  e  $h'(x) > 0$  para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ , mostre que  $\varphi$  tem um extremo local em  $x = 0$ . Será um ponto de máximo ou mínimo? Justifique.

(3,5) **V.** Estude quanto à natureza (convergência simples, absoluta e divergência) as séries seguintes:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+2}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n^2 + 1}, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^n}{n^2 + n!}.$$

(3,0) **VI.** a) Aplicando a Regra de Barrow prove que, sendo  $f \in C(\mathbb{R})$  e  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_{c-b}^{c-a} f(c-x) dx = \int_a^b f(x) dx .$$

b) Sendo  $g \in C(\mathbb{R})$  e  $G$  o seu integral indefinido com origem no ponto 1, mostre que

$$\max_{x \in I} |G(x)| \leq 2 \max_{x \in I} |g(x)|$$

onde  $I = [1, 3]$ .

# Resolução

I. a) Como  $(\log x)^{\frac{1}{2x}} = e^{\frac{\log(\log x)}{2x}}$  começamos por considerar, usando regra de Cauchy,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(\log x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x \log x} = 0$$

pelo que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log x)^{\frac{1}{2x}} = e^0 = 1.$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x+\frac{1}{x}}}{x} = +\infty.$$

c) Usando regra de Cauchy, teorema fundamental do cálculo e o teorema de derivação da função composta

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^{2\log(x+1)} e^{\cos t} dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(x+1)} e^{\cos(2\log(x+1))} = 2e.$$

II. a)

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} + 4} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{e^x}{2} \right).$$

b) Primitivando por partes

$$\int \frac{\log(2x)}{\sqrt{2x}} dx = \sqrt{2x} \log(2x) - \int \frac{1}{x} \sqrt{2x} dx = \sqrt{2x} \log(2x) - 2 \int \frac{1}{\sqrt{2x}} dx = \sqrt{2x} (\log(2x) - 2).$$

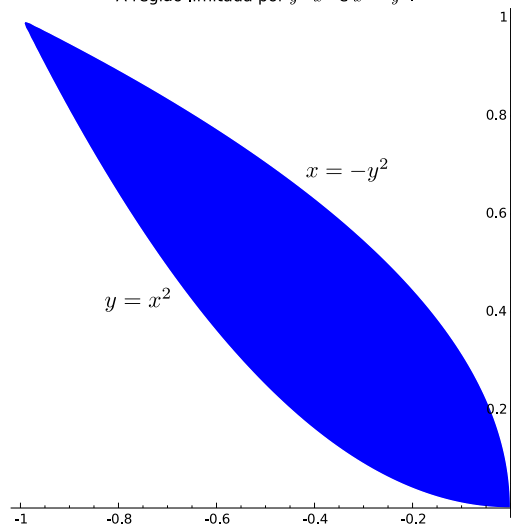
c) Usando a substituição  $\log x = t$  obtém-se

$$\begin{aligned} \int \frac{\log x}{x(\log x + 1)} dx &= \int \frac{t}{e^t(t+1)} e^t dt = \int \frac{t}{(t+1)} dt \\ &= \int 1 - \frac{1}{t+1} dt = t - \log|t+1| = \log x - \log|\log x + 1|. \end{aligned}$$

III.

$$\int_{-1}^0 \sqrt{-x} - x^2 dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

A região limitada por  $y=x^2$  e  $x=-y^2$ .



**IV.** Usando o teorema fundamental do cálculo e o teorema de derivação da função composta,

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= 3x^2h(x^3) - h(x) \\ \varphi''(x) &= 6xh(x^3) + 9x^4h'(x^3) - h'(x)\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\varphi'(0) &= -h(0) = 0 \\ \varphi''(0) &= -h'(0) < 0\end{aligned}$$

e portanto 0 é um ponto de máximo local de  $\varphi$ .

**V.** a) Como

$$\lim \frac{1/\sqrt{n}}{\sqrt{n}/(n+2)} = 1$$

a série tem a mesma natureza de  $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$  e portanto é divergente.

b) Como

$$0 \leq \frac{1 + (-1)^n}{n^2 + 1} \leq \frac{2}{n^2}$$

e a série  $\sum \frac{1}{n^2}$  é convergente podemos concluir que a série é (absolutamente) convergente.

c) Como

$$\lim \frac{\frac{e^{n+1}}{(n+1)^2 + (n+1)!}}{\frac{e^n}{(n)^2 + n!}} = 0 < 1$$

concluimos que a série é absolutamente convergente.

**VI.** a) Como  $f$  é uma função contínua, é primitivável. Seja  $F(x)$  uma sua primitiva. Então  $-F(c-x)$  é primitiva de  $f(c-x)$  e, usando duas vezes a Regra de Barrow,

$$\int_{c-b}^{c-a} f(c-x) dx = -F(c-x)|_{c-b}^{c-a} = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx .$$

b) Antes do mais note-se que ambos os máximos existem por aplicação do teorema de Weierstrass a  $|g|$ , que é contínua em  $[1, 3]$ , e a  $|G|$ , que também é contínua (por continuidade do integral indefinido e do módulo). Adicionalmente, usando a monotonia do integral, tem-se, para qualquer  $x \in I = [1, 3]$ ,

$$|G(x)| = \left| \int_1^x g(t) dt \right| \leq \int_1^x |g(t)| dt \leq \int_1^x \max_{x \in I} |g(x)| dt \leq (x-1) \max_{x \in I} |g(x)| .$$

Assim,

$$\max_{x \in I} |G(x)| \leq 2 \max_{x \in I} |g(x)| .$$