

Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste (Versão A) 5 de Janeiro de 2015

Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(3,0) **I.** Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\log x)^{\frac{1}{2x}}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x+\frac{1}{x}}}{x}, \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^{2 \log(x+1)} e^{\cos t} dt.$$

(4,0) **II.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a) } \frac{e^x}{e^{2x} + 4}, \quad \text{b) } \frac{\log(2x)}{\sqrt{2x}}, \quad \text{c) } \frac{\log x}{x(\log x + 1)}.$$

(3,0) **III.** Calcule a área da região do plano limitada pelas parábolas de equações $y = x^2$ e $x = -y^2$.

(3,5) **IV.** Sejam $h \in C^1(\mathbb{R})$ e $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = \int_x^{x^3} h(t) dt.$$

Supondo $h(0) = 0$ e $h'(x) > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, mostre que φ tem um extremo local em $x = 0$. Será um ponto de máximo ou mínimo? Justifique.

(3,5) **V.** Estude quanto à natureza (convergência simples, absoluta e divergência) as séries seguintes:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+2}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n^2 + 1}, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^n}{n^2 + n!}.$$

(3,0) **VI.** a) Aplicando a Regra de Barrow prove que, sendo $f \in C(\mathbb{R})$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$\int_{c-b}^{c-a} f(c-x) dx = \int_a^b f(x) dx .$$

b) Sendo $g \in C(\mathbb{R})$ e G o seu integral indefinido com origem no ponto 1, mostre que

$$\max_{x \in I} |G(x)| \leq 2 \max_{x \in I} |g(x)|$$

onde $I = [1, 3]$.