Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste (Versão B) 8 de Novembro de 2014

Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(4,0) **I.** Considere os conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x-3| \geq 4\}, \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{2}{1-e^x} \leq 0\right\}, \qquad C = (A \cap B).$$

a) Identifique os conjuntos A e B e mostre que

$$C = [\,7, +\infty[\,.$$

Resolução:

$$|x-3| \geq 4 \;\Leftrightarrow\; x \leq -1 \;\vee\; x \geq 7 \qquad e \qquad \frac{2}{1-e^x} \leq 0 \;\Leftrightarrow\; x > 0$$

pelo que $A =]-\infty, -1] \cup [7, +\infty[$ e $B =]0, +\infty[$. Logo $C = [7, +\infty[$.

b) Determine, se existirem, inf C, sup C, min C, inf $(C \cap \mathbb{Q})$ e min $(C \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$.

Resolução: inf C=min C=inf $(C \cap \mathbb{Q}) = 7$ e não existem sup C e min $(C \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$.

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Qualquer sucessão crescente de termos em C tem limite (em $\mathbb{R}$).

(ii) Qualquer sucessão decrescente de termos em C tem limite em C.

(iii) Qualquer sucessão de termos em C tem um sublimite em $\mathbb{R}$.

Resolução:
(i) Proposição falsa: por ex., $u_n = 7n$.
(ii) Proposição verdadeira: qualquer sucessão u_n de termos em C é minorada, pelo que, sendo decrescente, converge. Além disso $\lim u_n \geq 7$ e $7 \in C$.
(iii) Proposição falsa: por ex., $u_n = 7n$.

(2,5) **II.** Por indução, mostre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$,

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \quad .$$

Resolução: Como $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2.2}$, a condição é verdadeira para $n = 2$. Admitamos agora que a condição é verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}_2$. Provemo-la para $n+1$. Tem-se

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+1}{2n}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) =$$

$$= \frac{n+1}{2n}\,\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - 1}{2n(n+1)} = \frac{((n+1)-1)(n+1+1)}{2n(n+1)} = \frac{n+2}{2(n+1)}\,,$$

e portanto a condição é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}_2$.

(4,5) **III.** Calcule, ou mostre que não existem, os seguintes limites de sucessões:

a) $\lim \dfrac{6n^3+2}{5+3n^4}$ b) $\lim \sqrt{\dfrac{2n+\operatorname{sen}(n\pi)}{n^2+1}}$ c) $\lim \dfrac{5^n+2}{3+n^n}$ d) $\lim \sqrt[n]{\dfrac{n!}{e^n+n}}$

Resolução:

a) $\lim \dfrac{6n^3+2}{5+3n^4} = \lim \dfrac{6/n+2/n^4}{5/n^4+3} = 0.$

b) $\lim \sqrt{\dfrac{2n+\operatorname{sen}(n\pi)}{n^2+1}} = \lim \sqrt{\dfrac{2/n+\operatorname{sen}(n\pi)/n^2}{1+1/n^2}} = 0$, pois $|\operatorname{sen}(n\pi)| \le 1$ e $1/n^2$ é um infinitésimo.

c) $\lim \dfrac{5^n+2}{3+n^n} = \lim \dfrac{5^n/n^n+2/n^n}{3/n^n+1} = 0.$

d) Queremos calcular $\lim \sqrt[n]{b_n}$ com $b_n = \dfrac{n!}{e^n+n}$. Ora, como

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)!}{e^{n+1}+n+1}\,\frac{e^n+n}{n!} = (n+1)\,\frac{e^n+n}{e^{n+1}+n+1} = (n+1)\,\frac{1/e+n/e^{n+1}}{1+(n+1)/e^{n+1}} \to +\infty\,,$$

vem $\lim \sqrt[n]{b_n} = +\infty$.

(6,0) **IV.** Considere a função $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}((x+1)^2), & \text{se } x < 0. \\ \log(\log(x+1)), & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

a) Estude g quanto à continuidade.

Resolução: O domínio é a união de dois intervalos disjuntos, e em cada um deles g é a composta de funções contínuas, sendo portanto contínua.

b) Calcule $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

Resolução:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}((x+1)^2) = \pi/2 \;\; e \; \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \log(\log(x+1) = +\infty \;\; .$$

c) Será g prolongável por continuidade ao ponto 0? Justifique.

Resolução:A função será prolongável por continuidade ao ponto 0 se existir $\lim_{x\to0} g(x)$ (em $\mathbb{R}$). Ora, como $\lim_{x\to0+} g(x) = \lim_{x\to0+} \log(\log(x+1)) = -\infty$, não existe $\lim_{x\to0} g(x)$.

d) Calcule a função derivada g' e determine os intervalos de monotonia de g.

Resolução: Tem-se $g' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, dada por

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x+1)\log(x+1)}, & \text{se } x > o, \\ \dfrac{2(x+1)}{1+(x+1)^4}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Ora $g'(x) > 0$ para $x > 0$, e portanto g é estritamente crescente em $]0,+\infty[$. Por outro lado, $g'(x) > 0$ em $]-1,0]$ e $g'(x) < 0$ em $]-\infty,-1[$, sendo portanto estritamente crescente no primeiro intervalo e estritamente decrescente no segundo.

(3,0) **V.** a) Mostre que a equação $x^9+9x-5=0$ tem uma e uma só solução.

Resolução: Sendo $f(x) = x^9+9x-5$ e $f'(x) = 9(x^8+1) \neq 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, o Teorema de Rolle garante que f terá quando muito um zero em $\mathbb{R}$. Por outro lado, $f(0) = -5 < 0$ e $f(1) = 5 > 0$, pelo que o Teorema do Valor Intermédio garante a existência de um zero em $]0,1[$.

b) Prove que, para qualquer $x \in]1, +\infty[$,

$$\sqrt{x} - \frac{1}{2}(x+1) < 0 \ .$$

Sugestão: Use o Teorema de Lagrange.

Resolução: A função $\sqrt{x}$ é diferenciável em $]1, +\infty[$. Assim, sê-lo-á também em $]1, x[$ e é contínua em $[1, x]$, para qualquer $x > 1$. Estamos pois nas condições do Teorema de Lagrange, pelo que existe $\xi \in]1, x[$ tal que

$$\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}$$

e portanto, para qualquer $\xi > 1$,

$$\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} < \frac{1}{2}$$

Assim, para qualquer $x \in]1, +\infty[$, vem

$$\sqrt{x} - 1 < \frac{1}{2}(x-1) \quad , \quad \text{i.e.,} \qquad \sqrt{x} - \frac{1}{2}(x+1) < 0 \ .$$