
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(4,0) **I.** Considere os conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 3| \geq 4\}, \quad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{2}{1 - e^x} \leq 0\right\}, \quad C = (A \cap B).$$

a) Identifique os conjuntos A e B e mostre que

$$C = [7, +\infty[.$$

b) Determine, se existirem, $\inf C$, $\sup C$, $\min C$, $\inf (C \cap \mathbb{Q})$ e $\min (C \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$.

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

- (i) Qualquer sucessão crescente de termos em C tem limite (em \mathbb{R}).
- (ii) Qualquer sucessão decrescente de termos em C tem limite em C .
- (iii) Qualquer sucessão de termos em C tem um sublimite em \mathbb{R} .

(2,5) **II.** Por indução, mostre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$,

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

(4,5) **III.** Calcule, ou mostre que não existem, os seguintes limites de sucessões:

$$\text{a) } \lim \frac{6n^3 + 2}{5 + 3n^4} \quad \text{b) } \lim \sqrt{\frac{2n + \sin(n\pi)}{n^2 + 1}} \quad \text{c) } \lim \frac{5^n + 2}{3 + n^n} \quad \text{d) } \lim \sqrt[n]{\frac{n!}{e^n + n}}$$

(6,0) **IV.** Considere a função $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}((x+1)^2), & \text{se } x < 0. \\ \log(\log(x+1)), & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

- a) Estude g quanto à continuidade.
- b) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- c) Será g prolongável por continuidade ao ponto 0? Justifique.
- d) Calcule a função derivada g' e determine os intervalos de monotonia de g .

(3,0) **V.** a) Mostre que a equação $x^9 + 9x - 5 = 0$ tem uma e uma só solução.

b) Prove que, para qualquer $x \in]1, +\infty[$,

$$\sqrt{x} - \frac{1}{2}(x+1) < 0.$$

Sugestão: Use o Teorema de Lagrange.