TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste (Versão A) 8 de Novembro de 2014

Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(4,0) **I.** Considere os conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| \geq 1\}, \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{2}{e^x - 1} \leq 0\right\}, \qquad C = (A \cap B).$$

a) Identifique os conjuntos A e B e mostre que

$$C =]-\infty, 0[\,.$$

Resolução:

$$|x-2| \geq 1 \;\Leftrightarrow\; x \leq 1 \;\vee\; x \geq 3 \qquad e \qquad \frac{2}{e^x-1} \leq 0 \;\Leftrightarrow\; x < 0$$

pelo que $A =]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$ e $B =]-\infty, 0[$. Logo $C =]-\infty, 0[$.

b) Determine, se existirem, $\inf C$, $\sup C$, $\max C$, $\sup\,(C \cap \mathbb{Q})$ e $\max\,(C \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$.

Resolução: $\sup C = \sup\,(C \cap \mathbb{Q}) = 0$ e não existem $\inf C$, $\max C$ e $\max\,(C \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$.

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Qualquer sucessão decrescente de termos em C tem limite (em $\mathbb{R}$).
(ii) Qualquer sucessão de termos em C tem um sublimite em $\mathbb{R}$.
(iii) Qualquer sucessão crescente de termos em C tem limite em C.

Resolução:
(i) Proposição falsa: por ex., $u_n = -n$.
(ii) Proposição falsa: por ex., $u_n = -n$.
(iii) Proposição falsa: por ex., $u_n = -1/n \to 0 \notin C$.

(2,5) **II.** Por indução, mostre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$,

$$-1 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \ldots + (-1)^n\, n^2 = (-1)^n\, \frac{n(n+1)}{2} \quad .$$

Resolução: Como $-1 = -1\frac{(1+1)}{2} = -1$, a condição é verdadeira para $n = 1$. Admitamos agora que a condição é verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}_1$. Provemo-la para $n+1$. Tem-se

$$-1 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \ldots + (-1)^n\, n^2 + (-1)^{n+1}\,(n+1)^2 = (-1)^n\, \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+1}\,(n+1)^2 =$$

$$= (-1)^{n+1}(n+1)\,\frac{2(n+1)-n}{2} = (-1)^{n+1}\,\frac{(n+1)(n+2)}{2}\;,$$

e portanto a condição é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$.

(4,5) **III.** Calcule, ou mostre que não existem, os seguintes limites de sucessões:

a) $\lim \sqrt{\dfrac{2n+1}{4n+7}}$ b) $\lim \dfrac{n\cos(n\pi)+2n^3}{n^3+1}$ c) $\lim \dfrac{10^n+5}{n!+10}$ d) $\lim \sqrt[n]{\dfrac{n^5}{n!+1}}$

Resolução:

a) $\lim \sqrt{\dfrac{2n+1}{4n+7}} = \lim \sqrt{\dfrac{2+1/n}{4+7/n}} = \sqrt{\dfrac{2}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\lim \dfrac{n\cos(n\pi)+2n^3}{n^3+1} = \lim \dfrac{\cos(n\pi)/n^2+2}{1+1/n^3} = 2$, pois $|\cos(n\pi)| \leq 1$ e $1/n^2$ é um infinitésimo.

c) $\lim \dfrac{10^n+5}{n!+10} = \lim \dfrac{10^n/n!+5/n!}{1+10/n!} = 0$.

d) Queremos calcular $\lim \sqrt[n]{a_n}$ com $a_n = \frac{n^5}{n!+1}$. Ora, como

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^5}{(n+1)!+1}\frac{n!+1}{n^5} = \frac{(n+1)^5}{n^5}\frac{n!+1}{(n+1)!+1} = \frac{(n+1)^5}{n^5}\frac{1/(n+1)+1/(n+1)!}{1+1/(n+1)!} \to 0\,,$$

vem $\lim \sqrt[n]{a_n} = 0$.

(6,0) **IV.** Considere a função $f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \log(\log x), & \text{se } x > 1, \\ \operatorname{arctg}(x^2), & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

a) Estude f quanto à continuidade.

Resolução: O domínio é a união de dois intervalos disjuntos, e em cada um deles f é a composta de funções contínuas, sendo portanto contínua.

b) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Resolução:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}(x^2) = \pi/2 \;\; e \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \log(\log x) = +\infty \;\; .$$

c) Será f prolongável por continuidade ao ponto 1? Justifique.

Resolução:A função será prolongável por continuidade ao ponto 1 se existir $\lim_{x\to1} f(x)$ (em $\mathbb{R}$). Ora, como $\lim_{x\to1+} f(x) = \lim_{x\to1+} \log(\log x) = -\infty$, não existe $\lim_{x\to1} f(x)$.

d) Calcule a função derivada f' e determine os intervalos de monotonia de f.

Resolução: Tem-se $f' : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\log x}, & \text{se } x > 1, \\ \dfrac{2x}{1+x^4}, & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Ora $f'(x) > 0$ para $x > 1$, e portanto f é estritamente crescente em $]1,+\infty[$. Por outro lado, $f'(x) > 0$ em $]0,1]$ e $f'(x) < 0$ em $]-\infty,0[$, sendo portanto estritamente crescente no primeiro intervalo e estritamente decrescente no segundo.

(3,0) **V.** a) Mostre que a equação $x^7+7x+3=0$ tem uma e uma só solução.

Resolução: Sendo $g(x) = x^7+7x+3$ e $g'(x) = 7(x^6+1) \neq 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, o Teorema de Rolle garante que g terá quando muito um zero em $\mathbb{R}$. Por outro lado, g é contínua em $\mathbb{R}$, $g(0) = 3 > 0$ e $g(-1) = -5 < 0$, pelo que o Teorema do Valor Intermédio garante a existência de um zero em $]-1,0[$.

b) Prove que, para qualquer $x \in]0, \pi/2[$,

$$\text{tg } x - x > 0 \ .$$

Sugestão: Use o Teorema de Lagrange.

Resolução: A função tg é diferenciável em $]0, \pi/2[$. Assim, sê-lo-á também em $]0, x[$ e é contínua em $[0, x]$, para qualquer $0 < x < \pi/2$. Estamos pois nas condições do Teorema de Lagrange, pelo que existe $\xi \in]0, x[$ tal que

$$\frac{\operatorname{tg} x - 0}{x - 0} = \frac{1}{\cos^2 \xi}$$

e portanto

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{1}{\cos^2 \xi} > 1$$

pois $\cos^2 \xi < 1$ se $\xi \in]0, \pi/2[$. Assim, para qualquer $x \in]0, \pi/2[$, vem

$$\text{tg } x - x > 0 \ .$$