
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(4,0) I. Considere os conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| \geq 1\}, \quad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{2}{e^x - 1} \leq 0\right\}, \quad C = (A \cap B).$$

a) Identifique os conjuntos A e B e mostre que

$$C =]-\infty, 0[.$$

b) Determine, se existirem, $\inf C$, $\sup C$, $\max C$, $\sup (C \cap \mathbb{Q})$ e $\max (C \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$.

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

- (i) Qualquer sucessão decrescente de termos em C tem limite (em \mathbb{R}).
- (ii) Qualquer sucessão de termos em C tem um sublimite em \mathbb{R} .
- (iii) Qualquer sucessão crescente de termos em C tem limite em C .

(2,5) II. Por indução, mostre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$,

$$-1 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \dots + (-1)^n n^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

(4,5) III. Calcule, ou mostre que não existem, os seguintes limites de sucessões:

$$\text{a) } \lim \sqrt{\frac{2n+1}{4n+7}} \quad \text{b) } \lim \frac{n \cos(n\pi) + 2n^3}{n^3 + 1} \quad \text{c) } \lim \frac{10^n + 5}{n! + 10} \quad \text{d) } \lim \sqrt[n]{\frac{n^5}{n! + 1}}$$

(6,0) IV. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \log(\log x), & \text{se } x > 1, \\ \operatorname{arctg}(x^2), & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

- a) Estude f quanto à continuidade.
- b) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- c) Será f prolongável por continuidade ao ponto 1? Justifique.
- d) Calcule a função derivada f' e determine os intervalos de monotonia de f .

(3,0) V. a) Mostre que a equação $x^7 + 7x + 3 = 0$ tem uma e uma só solução.

b) Prove que, para qualquer $x \in]0, \pi/2[$,

$$\operatorname{tg} x - x > 0.$$

Sugestão: Use o Teorema de Lagrange.