# Cálculo Diferencial e Integral I

Exame, 1º Teste, 2º Teste (Versão B) 26 de Janeiro de 2015

**Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores**

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

Para realizar o exame responda a todas as questões. Para realizar o 1º Teste responda aos grupos **I** a **V**. Para realizar o 2º teste responda aos grupos **VI** a **XII**.

## 1º Teste

(4,0) **I.** Considere os conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : ||x| + 2| \leq \pi + 2\}, \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{e^x - e}{x+1} > 0\right\}, \qquad C = A \cap B.$$

a) Identifique os conjuntos $A$ e $B$ e mostre que $C = [-\pi, -1[\ \cup\ ]1, \pi]$.

b) Determine, se existirem, $\inf C$, $\sup C$, $\max C$, $\min C$ e $\min C \cap \mathbb{Q}$.

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

i) Existe uma sucessão de termos em $C$ com limite 1.

ii) Qualquer sucessão de termos em $C$ com um sublimite em $C$ é convergente.

iii) Qualquer sucessão $(a_n)$ de termos em $C$ verificando $a_n/a_{n+1} < 0$ para todo o $n$ é divergente.

(4,0) **II.** Considere uma sucessão de termo geral $a_n$ definida por

$$\begin{cases} a_1 = 1/3, \\ a_{n+1} = 1 + (a_n - 1)a_n, \text{ se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Mostre, usando indução, que $a_n \in ]0, 1[$ para $n \geq 1$.

b) Mostre que a sucessão é crescente.

c) Justifique que a sucessão é convergente e determine o seu limite.

(3,5) **III.** Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

a) $\lim \dfrac{\sqrt{n} - n^3}{(n + \sqrt{n})(n^2 + 2n^{3/2})}$ b) $\lim \left(\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4} + n\pi\right) + 1\right)^n$ c) $\lim \dfrac{n!(3n)!}{(4n)!}$

(6,5) **IV.** Considere a função $g : \mathbb{R} \setminus \{-\pi/2, \pi/2\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2(\operatorname{sen} x - 1)}, & \text{se } |x| < \pi/2, \\ \operatorname{arctg}(e^{x+\pi/2}), & \text{se } |x| > \pi/2. \end{cases}$$

a) Estude $g$ quanto à continuidade.

b) Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

c) Decida se $g$ é prolongável por continuidade a cada um dos pontos $-\pi/2$ e $\pi/2$.

d) Calcule a função derivada $g'$ e determine os intervalos de monotonia de $g$.

(2,0) **V.** Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Suponha-se que existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq M\}$ é limitado e não vazio.

Mostre que $F$ possui um máximo absoluto.

# 2º Teste

(3,0) **VI.** Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen} 3x}{\operatorname{sen} x}\,, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 1^+} \left(x^2+x-1\right)^{\frac{1}{x-1}}$$

(3,5) **VII.** a) Calcule a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que satisfaz:

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=\frac{2+x}{4+x^2} \quad \text{e} \quad f(0)=\log 2\,.$$

b) Escreva uma expressão geral para as primitivas em $]1,+\infty[$ de

$$\frac{1}{(1-x)\sqrt{x}}.$$

(2,0) **VIII.** Calculando integrais adequados determine a área do triângulo limitado pelas rectas de equação:

$$y=x\,, \qquad y=3x\,, \qquad y=4-x\,.$$

(3,0) **IX.** Calcule os seguintes integrais:

$$\text{a) } \int_1^e \sqrt{x}\log x\,dx\,, \qquad \text{b) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx\,,$$

(3,0) **X.** Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável e considere $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$g(x)=\int_{x^2}^{x} f(t)\,dt\,.$$

a) Mostre que $g''(0)+2g'(0)=f'(0)$.

b) Se $p_1(x)=x$ é o polinómio de McLaurin de primeira ordem de $f$, mostre que $g$ tem um mínimo local em $x=0$.

(3,0) **XI.** Determine para que valores de $x\in\mathbb{R}$ a seguinte série de potências converge absolutamente, simplesmente ou diverge:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n(n+1)}\,.$$

(2,5) **XII.** Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)=\omega>0\,.$$

Mostre que

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{s-t}f(s)\,ds=\omega\,.$$

Sugestão: Comece por mostrar que $\lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^s f(s)\,ds=+\infty$.