TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I

Exame, 1º Teste, 2º Teste (Versão A) 26 de Janeiro de 2015

Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de Computadores

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

Para realizar o exame responda a todas as questões. Para realizar o 1º Teste responda aos grupos **I** a **V**. Para realizar o 2º teste responda aos grupos **VI** a **XII**.

1º Teste

(4,0) **I.** Considere os conjuntos:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : ||x| + 1| \leq \sqrt{2} + 1\right\}, \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x+1}{e^x - e} > 0\right\}, \qquad C = A \cap B.$$

a) Identifique os conjuntos A e B e mostre que $C = \left[-\sqrt{2}, -1\right[\, \cup \, \left]1, \sqrt{2}\right]$.

b) Determine, se existirem, $\inf C$, $\sup C$, $\max C$, $\min C$ e $\max C \cap \mathbb{Q}$.

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

i) Existe uma sucessão de termos em C com limite 0.

ii) Qualquer sucessão de termos em C tem um sublimite em C.

iii) Qualquer sucessão (a_n) de termos em C verificando $a_n a_{n+1} < 0$ para todo o n é divergente.

(4,0) **II.** Considere uma sucessão de termo geral b_n definida por

$$\begin{cases} b_1 = 1/2, \\ b_{n+1} = b_n(b_n - 1) + 1, \text{ se } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Mostre, usando indução, que $b_n \in \left]0, 1\right[$ para $n \geq 1$.

b) Mostre que a sucessão é crescente.

c) Justifique que a sucessão é convergente e determine o seu limite.

(3,5) **III.** Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

a) $\lim \dfrac{\sqrt{n} + n^3}{(n + \sqrt{n})(n^2 + n^{3/2})}$ b) $\lim \left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + n\pi\right) + 1\right)^n$ c) $\lim \dfrac{(3n)!}{n!(2n)!}$

(6,5) **IV.** Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{-\pi/2, \pi/2\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2(\operatorname{sen} x + 1)}, & \text{se } |x| < \pi/2, \\ \operatorname{arctg}(e^{x - \pi/2}), & \text{se } |x| > \pi/2. \end{cases}$$

a) Estude f quanto à continuidade.

b) Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

c) Decida se f é prolongável por continuidade a cada um dos pontos $-\pi/2$ e $\pi/2$.

d) Calcule a função derivada f' e determine os intervalos de monotonia de f.

(2,0) **V.** Seja $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Suponha-se que existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $\{x \in \mathbb{R} : G(x) \leq m\}$ é limitado e não vazio.

Mostre que G possui um mínimo absoluto.

2º Teste

(3,0) **VI.** Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

$$\text{a)} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{tg} x}, \qquad \text{b)} \lim_{x\to +\infty} (2e^x+1)^{\frac{1}{x}}$$

(3,5) **VII.** a) Calcule a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que satisfaz:

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{1+x}{9+x^2} \quad \text{e} \quad f(0)=\log 3\,.$$

b) Escreva uma expressão geral para as primitivas em $]0,+\infty[$ de

$$\frac{1}{x\sqrt{x+1}}.$$

(2,0) **VIII.** Calculando integrais adequados determine a área do triângulo limitado pelas rectas de equação:

$$y=x\,, \qquad y=2x\,, \qquad y=3x-2\,.$$

(3,0) **IX.** Calcule os seguintes integrais:

$$\text{a)} \int_0^1 \left(\frac{x}{2}+x^3\right)\operatorname{arctg} x\,dx\,, \qquad \text{b)} \int_1^{\log 2} \frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}\,dx\,,$$

(3,0) **X.** Seja $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável e considere $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\int_x^{x^2} h(t)\,dt\,.$$

a) Mostre que $f''(1)-2f'(1)=3h'(1)$.

b) Se $p_1(x)=x-1$ é o polinómio de Taylor de primeira ordem de h no ponto 1, mostre que f tem um mínimo local em $x=1$.

(3,0) **XI.** Determine para que valores de $x\in\mathbb{R}$ a seguinte série de potências converge absolutamente, simplesmente ou diverge:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}+1}\,.$$

(2,5) **XII.** Seja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\alpha>0\,.$$

Mostre que

$$\lim_{x\to-\infty}\int_x^0 e^{x-t}g(t)\,dt=\alpha\,.$$

Sugestão: Comece por mostrar que $\lim_{x\to-\infty}\int_x^0 e^{-t}g(t)\,dt=+\infty$.