7 Séries

1. Para cada uma das seguintes séries, estude a sua convergência, calculando, se possível, a sua soma.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$, b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} e^k \pi^{-2k}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$,

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$, f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n+1}\right)$,

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \pi^{-n+2}$, h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-1)^n}{4^n}$,

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right)$, j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-n+1}}{2^{-n+1}}$,

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}}$, l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}+1}{3^n}$,

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+2)!}$, n) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2+(-1)^n)2^{-n}$,

o) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg}(n)$, p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcsen}\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

2. Determine a natureza das seguintes séries usando critérios de convergência apropriados:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3+n^2+1}}$, b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+n!}$, c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-4}{n^4-1}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!}$, e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{1-2^n}$, f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+\sqrt{n}}\right)^n$,

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{n+1}}{1+3^n}$, h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}$, i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^3}$,

j) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^6-1}}$, k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n\sqrt{n}+1}$, l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1000)^n}{n!}$,

m) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-2^n}{n^2-3^n}$, n) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$, o) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2-1}$,

p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen} \frac{1}{n}$, q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n^2}$, r) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$.

3. (Exercício II.14 de [1]) Determine a natureza das seguintes séries:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3+4}$, b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n2^n}{e^n}$, d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^2+2^n}$,

e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$, f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1+3^n}$, h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{1000}}{(1.001)^n}$,

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$, j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt[3]{n+1}\sqrt[4]{n+2}}$,

k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(2n)!]^2}{n!(3n)!}$, l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^3$.

4. (Exercício 2.13 de [2]) Determine a natureza de cada uma das séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n!}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^n.$$

5. (a) Determine a natureza das séries

i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$, ii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log^2 n}$, iii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2\log n}$, iv) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\log n}$.

(Sugestão: Utilize o critério do integral para i) e ii) e o critério de comparação para iii) e iv).)

(b) Justifique que as séries

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^{\alpha} n}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \log n}$$

divergem para $\alpha \leq 1$ e convergem para $\alpha > 1$.

6. (a) Justifique que se f é uma função real tal que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = L \in \mathbb{R}^+,$$

então, para qualquer sucessão $a_n \geq 0$ com $a_n \to 0$, as séries $\sum a_n$ e $\sum f(a_n)$ têm a mesma natureza.

(b) Determine a natureza das séries seguintes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n^{\alpha}}} - 1\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right).$$

7. (Exercício 2.15 de [2]) Sendo (a_n) o termo geral de uma sucessão de termos positivos, indique, justificando, a natureza das séries

$$\sum (1 + a_n), \qquad \sum \frac{1}{n^2 + a_n}.$$

8. (Exercício 2.17 de [2]) Seja (a_n) uma sucessão de termos positivos e (b_n) uma sucessão limitada.

a) Mostre que a convergência da série $\sum a_n$ implica a convergência da série $\sum a_n b_n$.

b) Use o resultado anterior para provar que se a série $\sum a_n$ converge então também converge $\sum a_n^2$.

c) Mostre, por meio de um contraexemplo, que a recíproca da proposição anterior é falsa.

9. Determine a natureza das séries:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1+n}{n}\right)$, b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^3 + 2}$,

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^{3000}}{3^n}$, d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$,

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$, f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$.

10. (Exercício II.17 de [1]) Determine se são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes as séries:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \qquad \text{b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1},$$

$$\text{c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+2}, \qquad \text{d)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}.$$

11. Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ as seguinte séries convergem absolutamente, simplesmente ou divergem:

$$\text{a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}, \qquad \text{b)} \sum_{n=0}^{\infty}, \frac{(x+2)^n}{(n+2)2^n}$$

$$\text{c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{3n}}{n+1}, \qquad \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^n}{2n},$$

12. (Exame 9-1-2006) Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a seguinte série converge absolutamente, simplesmente ou diverge:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nx)^n}{(n+1)^n}.$$

13. (Exame 23-1-2006) Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a seguinte série converge absolutamente, simplesmente ou diverge:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(x-1)^n}{n!+1}.$$

14. (Exercícios 2.34, 2.35, 2.43, 2.44 de [2]) Determine para que valores reais de x são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes e divergentes as séries

$$\text{a)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^n, \qquad \text{b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n^2+1}, \qquad \text{c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n}\left(\frac{x-2}{x}\right)^n,$$

$$\text{d)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n+1}, \qquad \text{e)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1+8^n}(x-1)^n.$$

15. (Exercício II.18 de [1]) Determine os intervalos de convergência das séries seguintes, indicando em que pontos é cada série simplesmente ou absolutamente convergente:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}, \qquad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \qquad \text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n+1},$$

$$\text{d) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+a)^n}{a^{n+1}}, \qquad \text{e) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x+1)^{2n}}{n^2+1}.$$

16. (Exercício 2.50 de [2]) Suponha que a série de potências de x

$$\sum a_n x^n$$

é convergente no ponto -3 e divergente no ponto 3:

a) Indique, justificando, se a convergência da série no ponto -3 é simples ou absoluta.

b) Indique o conjunto dos valores de x para os quais a série é absolutamente convergente e o conjunto dos valores de x para os quais a série é divergente.

c) Dê um exemplo de uma série que verifique as condições requeridas no enunciado.

17. Calcule a soma e o domínio de convergência das séries seguintes:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+2}, \qquad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!3^n} x^n,$$

$$\text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x+1)^{2n+1}, \qquad \text{d) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!} x^{4n}.$$

18. Desenvolva as seguintes funções em série de Taylor no ponto a, indicando o menor intervalo aberto onde esse desenvolvimento é válido. Aproveite para determinar as respectivas derivadas de ordem n em a.

$$\text{a) } f(x) = e^{2x+1}, \quad a = 0, \qquad \text{b) } f(x) = \frac{x}{2x+1}, \quad a = 0,$$

$$\text{c) } f(x) = \cos(x+1)^2, \quad a = -1, \qquad \text{d) } f(x) = \log x, \quad a = 2,$$

$$\text{e) } f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt, \quad a = 0, \qquad \text{f) } f(x) = \int_0^x \operatorname{sen} t^2\, dt, \quad a = 0,$$

$$\text{g) } f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}, \quad a = 0, \qquad \text{h) } f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad a = 1,$$

$$\text{i) } f(x) = \operatorname{arctg} x^2, \quad a = 0, \qquad \text{j) } f(x) = \log(x^2+1), \quad a = 0.$$

19. (Exercício IV.16 de [1]) Quando possível, desenvolva em série de Mac-Laurin as funções:

a) $x^3 + 1$,	b) $\log x$,	c) $\log(x+3)$,
d) $\dfrac{1}{(1-x)^3}$,	e) $\dfrac{1}{x(x-1)}$,	f) $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$,
g) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, ,	h) $x\operatorname{arctg} x$,	i) $\operatorname{sen} x \cos x$,

Para os desenvolvimentos que não for possível obter, explique a razão desse facto; para os que tiver obtido, indique o intervalo em que representam a função considerada.

20. (Exercício IV.17 de [1])

Questão análoga à anterior, sendo os desenvolvimentos em série de Mac-Laurin substituídos por desenvolvimentos em série de Taylor relativa ao ponto 1 e as funções a desenvolver substituídas por:

a) $x^2 - x + 1$,	b) $\dfrac{1}{x}$,	c) e^x,
d) $x \log x$,	e) $\dfrac{x}{(x+1)^2}$,	f) $x^{-2}(x-1)^2$,
g) $x^2(x-1)^{-2}$,	h) $x \log(x-1)$,	i) $\sqrt[3]{x-1}$,

21. Considere a função $f(x) = \dfrac{x^4}{1-2x}$.

 (a) Desenvolva f em série de potências de x e indique um intervalo aberto no qual a função coincide com a série obtida.

 (b) Utilize o desenvolvimento em série encontrado para determinar $f^{(n)}(0)$ e justifique que f tem um mínimo local em 0.

22. (Exercício 4.158 de [2]) Desenvolva em série de potências de $x-1$ a função $f(x) = (x-1)e^x$ e indique os pontos em que a soma da série obtida é igual ao valor da função. Aproveitando o desenvolvimento obtido, calcule $f^{(n)}(1)$.

23. (Exercício 4.146 de [2])

 (a) Determine o raio de convergência da série de potências $\sum \frac{(x-1)^n}{3^n\sqrt{n}}$ e indique, justificando, em que pontos é que a série converge absolutamente.

(b) Supondo que a função g é definida pela igualdade

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n \sqrt{n}}$$

no conjunto de todos os pontos onde a série é convergente, calcule $g(1)$ e $g''(1)$ e escreva a série de Taylor no ponto 1 da função $x + g'(x)$.

24. (Exercício 4.154 de [2]) Desenvolva em série de MacLaurin a função $\phi(x) = x \log(1+x^3)$ e aproveite o desenvolvimento para justificar que a função tem um mínimo no ponto 0 (mostre que $\phi'(0) = \phi''(0) = \phi'''(0) = 0$ e observe o sinal de $\phi^{(4)}(0)$).

25. Desenvolva a função

$$\phi(x) = \int_0^{x^2} \log(1+t^2)\, dt$$

em série de MacLaurin, indicando o menor intervalo aberto onde esse desenvolvimento é válido. Decida se ϕ tem um extremo em 0; em caso afirmativo, classifique-o.

Outros exercícios: 2.8, 2.11, 2.18, 2.19, 2.20, 2.25, 2.27, 2.33, 2.46, 2.51, 4.142, 4.145, 4.152, 4.156 de [2].

Parte III

Bibliografia

0 Bibliografia

[1] J. Campos Ferreira. *Introdução à Análise Matemática*. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.

[2] Departamento de Matemática do Instituto Superior Técnico. *Exercícios de Análise Matemática I/II*, 2ª edição, 2005. IST Press, Lisboa.