1 Números Reais

1. Simplifique as seguintes expressões (definidas nos respectivos domínios):

   a) $\frac{\frac{x}{2}}{\frac{2}{x}}$,

   b) $\frac{x+1}{\frac{1}{x}+1}$,

   c) $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{x^2+x}$,

   d) $\sqrt{x^2}$,

   e) $\left(\sqrt{x}\right)^2$,

   f) $4^x \frac{4}{2^x}$,

   g) $2^{x^2} (2^x)^2$,

   h) $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}}$,

   i) $\sqrt{x-2}\,\sqrt{x+2}$,

   j) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$,

   k) $\log\left(\frac{1}{x}\right) + \log\left(x^2\right)$,

   l) $\log\left(2x^2 + 2x^{-2}\right) + \log\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^{-2}}{2}\right)$.

2. Resolva as seguintes equações e inequações:

   a) $(x^2 - 3x + 2)(x - 1) \geq 0$,

   b) $x \leq 2 - x^2$,

   c) $x^2 \leq 2 - x^4$,

   d) $x^3 + x \leq 2x^2$,

   e) $\sqrt[3]{x^2 + 2x} = 2$,

f) $\sqrt[3]{x-1} = \sqrt{x-1}$,

g) $\frac{x-1}{x^2-1} \leq 1$,

h) $x = \frac{1}{x}$,

i) $x < \frac{1}{x}$,

j) $x < |x|$,

k) $|x| \geq \frac{x}{2} + 1$,

l) $|x| \leq |x-2|$,

m) $|x^2 - 2| \leq 2$,

n) $\frac{x^4-16}{|x-1|} \leq 0$,

o) $e^{x^3} < 1$,

p) $e^{-2x} - 2e^{-x} \leq -1$,

q) $\log\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0$,

r) $\log(x^2 - 3) \geq 0$,

3. Escreva cada um dos seguintes conjuntos como intervalos ou reuniões de intervalos:

a) $\left\{x : \frac{x-1}{x+1} \leq 1\right\}$,

b) $\left\{x : \frac{x^4-1}{x^3} \leq x\right\}$,

c) $\{x : |3x - 4| \geq x^2\}$,

d) $\{x : |x-1|(x^2-4) \geq 0\}$,

e) $\{x : (|x| - 1)(x^2 - 4) \leq 0\}$,

f) $\{x : |x^2 - 1| \leq |x + 1|\}$,

g) $\{x : x^2 - |x| - 2 \leq 0\}$,

h) $\left\{x : \frac{x}{|x|-1} \geq 0\right\}$,

i) $\left\{x : \frac{x^2-|x|}{x-3} \leq 0\right\}$,

4. Indique justificando quais das proposições seguintes são verdadeiras:

a) $\{1\} \subset \{1, \{2, 3\}\}$

b) $\{1\} \in \{1, \{2, 3\}\}$

c) $2 \in \{1, \{2, 3\}\}$

d) $1 \in \{\mathbb{R}\}$

e) $\emptyset = \{x \in \mathbb{N} : x = x + 1\}$

f) $\emptyset \in \{0\}$

g) $\emptyset \subset \{0\}$

h) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\, x > 0 \;\Leftrightarrow\; x^{-1} > 0$

i) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\, x > 1 \;\Leftrightarrow\; x^{-1} < 1$

j) $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\, x < y \;\Rightarrow\; y^{-1} < x^{-1}$

k) $\forall_{x\neq 0}\, x^2 > 0$

l) $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\, x < y \;\Rightarrow\; x^2 < y^2$

m) $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\, x < y < 0 \;\Rightarrow\; x^2 > y^2$

5. (Ex. 1.17, 1.18 e 1.19 de [2]) Demonstre pelo princípio de indução matemática que:

   a) $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2,\ \forall n \in \mathbb{N}_1$[1].

   b) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, para todo o natural $n \geq 1$.

   c) $(n!)^2 > 2^n n^2$, para todo o natural $n \geq 4$.

   d) $n! \geq 2^{n-1}$, para todo o natural $n \geq 1$.

6. Demonstre pelo princípio de indução matemática que:

   a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$.

   b) Para $a \in \mathbb{R}$, $(a-1)(1 + a + \cdots + a^n) = a^{n+1} - 1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   c) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   d) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$.

   e) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$.

7. Demonstre pelo princípio de indução matemática que:

   a) $(n+2)! \geq 2^{2n}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$.

   b) $2n - 3 < 2^{n-2}$, para todo o natural $n \geq 5$.

   c) $7^n - 1$ é múltiplo[2] de 6 para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$.

   d) $2^{2n} + 2$ é múltiplo de 3 para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

8. (Ex. 1.20 de [2]) Demonstre a desigualdade de Bernoulli:

   Sendo $a > -1$ e $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

9. Seja $P(n)$ a condição "$n^2 + 3n + 1$ é par".

[1] Esta expressão pode ser escrita na forma $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

[2] Um número é múltiplo de 6 sse é da forma $6k$, para algum $k \in \mathbb{N}_1$.

a) Mostre que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

b) Pode concluir que n^2+3n+1 é par, para qualquer $n \in \mathbb{N}$?

c) Mostre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, n^2+3n+1 é ímpar.

10. Seja $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $f(0) = 1$ e $f(n+1) = (2n+2)(2n+1)f(n)$. Mostre por indução matemática que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = (2n)!$$

11. Considere a sucessão real (u_n) dada por:

$$\begin{cases} u_1 = 3, \\ u_{n+1} = \frac{3u_n}{(n+1)^2}. \end{cases}$$

Mostre, usando indução matemática, que $u_n = \frac{3^n}{(n!)^2}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$.

12. (Teste de 29/4/2006) Considere a sucessão real (u_n) dada por:

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n^2 + 1}. \end{cases}$$

Mostre, usando indução matemática, que $u_n = \sqrt{2^n - 1}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$.

13. Verifique que se $n \in \mathbb{N}$ é ímpar, então n^2 é também ímpar. O que pode concluir de $n \in \mathbb{N}$ sabendo que n^2 é par?

14. Verifique que se x, y são números racionais, então $x+y$, xy, $-x$, x^{-1} (para $x \neq 0$) são também números racionais.[3]

15. (Ex. I.3 de [1]) Verifique que, se x é um número racional diferente de zero e y um número irracional, então $x+y$, $x-y$, xy e y/x são irracionais; mostre também que, sendo x e y irracionais, a sua soma, diferença, produto e quociente podem ser ou não ser irracionais.

16. (Ex. 1.2 de [2]) Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq \frac{x}{2} + 2\right\}, \qquad B = [-3, 4], \qquad C = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

a) Mostre que $A \cap B = \left[-3, -\frac{4}{3}\right] \cup \{4\}$.

[3] Ou seja, $\mathbb{Q}$ é fechado para a adição e multiplicação e contem os simétricos e inversos de todos os seus elementos. Mostra-se assim, uma vez que também os elementos neutros 0 e 1 são racionais, que $\mathbb{Q}$ é um corpo. É fácil ver que também verifica as propriedades de ordem, ou seja, $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado.

b) Indique, se existirem em $\mathbb{R}$, $\sup A$, $\min(A \cap B)$, $\max(A \cap B)$, $\inf(A \cap B \cap C)$, $\sup(A \cap B \cap C)$ e $\min(A \cap B \cap C)$.

17. (Exame de 19/1/2000) Considere os conjuntos A e B definidos por

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, \frac{x-1}{x \log x} > 0\right\}, \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, x = -\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_1\right\}.$$

Mostre que o conjunto A é igual a $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Determine, caso existam, ou justifique que não existem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo dos conjuntos A e $A \cup B$.

18. (Ex. 1.8 de [2]) Considere os conjuntos

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{\log x} \geq 1\right\}, \qquad B = \left\{1 - \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}_1\right\}.$$

Para cada um dos conjuntos A e B, indique o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes e, no caso de existirem (em $\mathbb{R}$), o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo.

19. Sejam A, B e C os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2|x| > 3\right\}, \qquad B = \left]0, \sqrt{2}\right[,$$
$$C = \left\{\sqrt{2} - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_1\right\}.$$

a) Calcule A sob a forma de uma reunião de intervalos.

b) Indique, caso exista, $\inf A$, $\min A \cap B$, $\max A \cap B$, $\max A \cap B \cap \mathbb{Q}$, $\inf A \cap B \cap \mathbb{Q}$, $\max C$, $\max B \setminus C$.

20. (Exame de 2000) Sejam A e B os subconjuntos de $\mathbb{R}$ definidos por

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq x^2 - 1\}, \qquad B = [-2, 2].$$

a) Determine A sob a forma de reunião de intervalos.

b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, o máximo e o mínimo de $A \cap B$ e o supremo, ínfimo, máximo e mínimo de $(A \cap B) \setminus \mathbb{Q}$.

21. (Exame de 30/11/2002) Considere os seguintes conjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x : |x^2 - 2| \leq 2x + 1\right\}, \qquad B = \mathbb{Q}, \qquad C = \left\{\frac{1}{k^2} : k \in \mathbb{N}_1\right\}.$$

a) Mostre que $A = \left[-1 + \sqrt{2}, 3\right]$.

b) Determine, se existirem, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo de $A \cap B$, C.

22. (Exame de 16/1/2004) Considere os seguintes conjuntos de números reais:

$$A = \left\{ x : \frac{x^2 - 1}{x} \geq |x - 1| \right\}, \qquad B = \{x : \operatorname{sen} x = 0\}, \qquad C = \mathbb{Q}.$$

a) Mostre que $A = \left[-\frac{1}{2}, 0\right[\cup [1, +\infty[$.

b) Escreva os conjuntos dos majorantes e minorantes de $A \cap C$ e $B \cap C$. Calcule ou conclua da não existência de $\sup A$, $\inf A \cap C$, $\min A \cap C$, $\min B$, $\sup B \cap C$.

23. (Teste de 12/11/2005) Considere os seguintes conjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x : x \geq 0 \ \wedge \ \frac{x^4 - 4}{|x - 1|} \leq 0 \right\}, \qquad B = \{x : x \geq 0 \ \wedge \ \exists_{k \in \mathbb{N}}\, kx \notin \mathbb{Q}\}.$$

a) Mostre que $A = \left[0, \sqrt{2}\right] \setminus \{1\}$ e justifique que $B = [0, +\infty[\setminus \mathbb{Q}$.

b) Determine, ou mostre que não existem, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo de cada um dos conjuntos A e $A \setminus B$.

24. (Teste de 29/4/2006) Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x : \frac{x^2 - 2}{|x| - 1} \leq 0 \right\}, \quad B = \{2^{n/2} : n \in \mathbb{N}_1\}.$$

a) Mostre que $A = \left[-\sqrt{2}, -1\right[\cup \left]1, \sqrt{2}\right]$.

b) Determine ou justifique que não existem, os supremo, máximo, ínfimo e mínimo de cada um dos conjuntos $A \cap \mathbb{Q}$, B e $B \cap \mathbb{Q}$.

25. (Ex. 1.10 de [2]) Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$, majorado e não vazio, e seja m um majorante de A, distinto do supremo desse conjunto. Mostre que existe $\epsilon > 0$ tal que $V_\epsilon(m) \cap A = \emptyset$.

26. (Ex. I.5 de [1]) Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$ tais que $A \subset B$ e suponha que A é não vazio e B é majorado. Justifique que existem os supremos de A e B e prove que se verifica $\sup A \leq \sup B$.

27. (Ex. 1.12 de [2]) Sendo U e V dois subconjuntos majorados e não vazios de $\mathbb{R}$, tais que $\sup U < \sup V$, justifique (de forma precisa e abreviada) as afirmações seguintes:

a) Se $x \in U$, então $x < \sup V$.

b) Existe pelo menos um $y \in V$ tal que $y > \sup U$.

28. (Ex. 1.14 de [2]) Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$.

   a) Prove que, se $\sup A < \inf B$, A e B são disjuntos.

   b) Mostre, por meio de exemplos, que se for $\sup A > \inf B \ \wedge \ \sup B > \inf A$, A e B podem ser ou não disjuntos.

Parte III
Bibliografia

0 Bibliografia

[1] J. Campos Ferreira. *Introdução à Análise Matemática*. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.

[2] Departamento de Matemática do Instituto Superior Técnico. *Exercícios de Análise Matemática I/II*, 2ª edição, 2005. IST Press, Lisboa.