Análise Matemática II

LEC, LET, LEAN

5ª Ficha de problemas-teste

I. Seja $a \in \mathbb{R}^n$ e considere as funções $\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\varphi(x) = a \,.\, x \qquad , \qquad \psi(x) = \|x\|^4 \,.$$

Para quaisquer $x, v \in \mathbb{R}^n$ determine $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(x)$ e $\frac{\partial \psi}{\partial v}(x)$.

II. Considere a função real definida em $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ por

$$f(x,y) = \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

1) Calcule as derivadas parciais de f em qualquer ponto $(x,y) \in D$.
2) Justifique que f é diferenciável no seu domínio e identifique a aplicação $f'(1,1)$.
3) Determine o conjunto dos vectores $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ tais que $D_v f(1,1) = 0$.

III. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por

$$g(x,y) = (e^{-xy^2} \,,\, \operatorname{sen}(x+y))$$

1) Determine a matriz jacobiana de g em cada ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2) Justifique que g é diferenciável em todo o seu domínio e identifique a aplicação $g'(0,\pi)$.
3) Mostre que $D_v g(0,\pi) \neq (0,0)$ para qualquer vector $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.