INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Análise Matemática II

LEC, LET, LEAN

4ª Ficha de problemas-teste

I. 1) Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ e considere a função $f : D \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y) = (x\, e^{y-x},\, \log(x/y)) \quad , \quad (x,y) \in D.$$

Determine o domínio D e diga, justificando, se o conjunto D é

(i) compacto (ii) conexo.

2) Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Indique, justificando, o conjunto dos pontos de continuidade de g.

II. Considere a função real definida em $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ por

$$\varphi(x,y) = \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

1) Justifique que φ é uma função contínua.

2) Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1,2] \text{ e } y \in [-1,1]\}$. Justifique que $\varphi(A)$ é um intervalo limitado e fechado.

3) Mostre que para qualquer $(x,y) \in D$ se tem

$$|\varphi(x,y)| \leq 2\,\|(x,y)\|$$

e aproveite o resultado para concluir que φ é prolongável por continuidade ao ponto $(0,0)$.

III. Considere a função real definida em $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}$ por

$$\psi(x,y) = \frac{2x(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}.$$

1) Justifique que ψ é uma função contínua.

2) Considere o conjunto $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x| \text{ e } x \in [-1,1]\}$. Indique, justificando sumariamente, se $\psi(\Omega)$ é um conjunto

(i) aberto (ii) fechado (iii) limitado (iv) conexo.

3) Calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \psi(x,y)$.