

Análise Matemática II

LEC, LET, LEAN

3ª Ficha de problemas-teste

I. 1) Sendo f uma função contínua em \mathbb{R} , considere a função φ definida por

$$\varphi(x) = \int_{2x}^{x+x^2} f(t) dt \quad , \quad x \in \mathbb{R} .$$

Justifique que φ é uma função diferenciável em \mathbb{R} e mostre que $\varphi'(1) - \varphi(1) = f(2)$.

2) Sejam $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e ψ a função definida por

$$\psi(x) = \int_0^x e^{x^2-y^2} g(y) dy \quad , \quad x \in \mathbb{R} .$$

a) Verifique, justificando, que ψ é uma função de classe $C^1(\mathbb{R})$ cuja derivada é dada por

$$\psi'(x) = 2x\psi(x) + g(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R} .$$

b) Mostre que se g é uma função positiva então ψ é estritamente crescente (em \mathbb{R}).

II. 1) Calcule o comprimento do gráfico da restrição ao intervalo $[-1, 1]$ da função $\operatorname{ch} x$.

2) Calcule o comprimento da linha definida pela equação $y = e^x$ com $x \in [0, 1]$.

Sugestão: Pode ser-lhe útil fazer a substituição $x = \frac{1}{2} \log(t^2 - 1)$.

III. 1) Calcule a área da região compreendida entre a parábola de equação $y^2 = 4x$ e a recta $y = 2x - 4$.

2) Calcule a área da região compreendida entre as curvas definidas pelas equações $y = x^2$, $x = y^2$, $y = 4$ e $x = 0$.