Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA II

Teste de autoavaliação sobre Cálculo Integral

Duração: 1h30.

1. Calcule uma primitiva das funções definidas pelas seguintes expressões:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} 2x - \operatorname{senh} x}{2 - \operatorname{sen}^2 x + \cosh x}\,, \quad g(t) = \frac{1}{t + \sqrt[3]{t^2}}\,, \qquad h(u) = u^2 e^{-u}\,.$$

2. Determine a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz às seguintes condições:

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{e^{3x} - e^{2x} - 1}{e^x + 3e^{3x}} & \forall x \in \mathbb{R}\,, \\[2ex] f(0) = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \arctan \sqrt{3}\,. \end{cases}$$

3. Calcule, justificando:

$$\lim_{x \to 0} \int_{x^2}^{x^4} \frac{\cos(\sqrt{t})}{x}\, dt.$$

4. Esboce e calcule a área do conjunto $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi \ \wedge \ \operatorname{sen} x \leq y \leq \frac{1}{2}\right\}$.

5. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$, e periódica de período $T > 0$. Mostre que a função φ dada por

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

é periódica de período T se e só se

$$\int_0^T f(t)\, dt = 0\,.$$

6. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$ e considere duas funções $f, g \in C([a, b])$, com $g(x) \geq 0$ para qualquer $x \in [a, b]$.

   1. Prove que existe $c \in [a, b]$ tal que

   $$\int_a^b f(x) g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx\,.$$

   2. Use o resultado anterior para mostrar que, para $n = 2, 3, 4 \ldots$,

   $$\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x+1}}\, dx \leq \frac{1}{n+1}\,.$$