Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA II

Teste de autoavaliação sobre Cálculo Integral

RESOLUÇÂO

1. As primitivações abaixo são efectuadas em qualquer intervalo contido no domínio de cada uma das funções a primitivar.

   $\int f(x)\,dx = -\log|2 - \operatorname{sen}^2 x + \cosh x| + C$ (imediata).

   Por substituição: fazendo $t = x^q$ vem $\sqrt[3]{t^2} = x^{\frac{2q}{3}}$. Fazendo $q = 3$, fica então $t = x^3$, $\sqrt[3]{t^2} = x^2$ e $\frac{dt}{dx} = 3x^2$. Logo

   $\int g(t)\,dt = \int \frac{3x^2}{x^3 + x^2}\,dx = 3\int \frac{1}{x+1}\,dx = 3\log|x+1| + C = \log\left|\sqrt[3]{t} + 1\right|^3 + C$

   Por primitivação por partes sucessiva:

$$\int u^2 e^{-u}\,du = -u^2 e^{-u} + 2\int u e^{-u}\,du = -u^2 e^{-u} - 2ue^{-u} + 2\int e^{-u}\,du$$

$$= -(u^2 + 2u + 2)e^{-u} + C.$$

2. Trata-se de calcular f como aquela das primitivas

$$\int \frac{e^{3x} - e^{2x} - 1}{e^x + 3e^{3x}}\,dx$$

   que satisfaz a condição dada em $x = 0$. Para o cálculo de uma primitiva particular consideremos a substituição de variável $t = e^x$. A nova primitiva a considerar para $t \in]0, +\infty[$ é a seguinte:

$$\int \frac{t^3 - t^2 - 1}{t + 3t^3}\frac{dt}{t} = \int \frac{t^3 - t^2 - 1}{t^2(1 + 3t^2)}\,dt$$

   Sendo a integranda uma função racional própria, procede-se à sua decomposição em fracções simples:

$$\frac{t^3 - t^2 - 1}{t^2(1 + 3t^2)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t^2} + \frac{c + dt}{1 + 3t^2}\,.$$

   Cálculo dos coeficientes:

$$t^3 - t^2 - 1 = at(1 + 3t^2) + b(1 + 3t^2) + ct^2 + dt^3\,,$$

   donde,

$$\begin{cases} 1 &= 3a + d \\ -1 &= 3b + c \\ 0 &= a \\ -1 &= b \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a &= 0 \\ b &= -1 \\ c &= 2 \\ d &= 1 \end{cases}$$

Como

$$\begin{aligned}
-\int \frac{1}{t^2}\,dt &= \frac{1}{t}+C_1\\
\int \frac{2}{1+3t^2}\,dt &= 2\int \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{\sqrt{3}} \qquad\qquad (u=\sqrt{3}t)\\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} u + C_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\sqrt{3}t)+C_2\\
\int \frac{t}{1+3t^2}\,dt &= \frac{1}{6}\int \frac{(1+3t^2)'}{1+3t^2}\,dt\\
&= \frac{1}{6}\log(1+3t^2)+C_3\,,
\end{aligned}$$

obtem-se:

$$\int \frac{t^3-t^2-1}{t^2(1+3t^2)}\,dt = \frac{1}{t}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\sqrt{3}t)+\frac{1}{6}\log(1+3t^2)+C_4\,.$$

Logo

$$f(x)=e^{-x}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\sqrt{3}e^x)+\frac{1}{6}\log(1+3e^{2x})+C\,.$$

Fazendo $x=0$, obtem-se $f(0)=1+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{3}+C$. Usando a hipótese $f(0)=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{3}$, resulta $C=-1$.

3. A função $u\mapsto \cos(\sqrt{u})$ está definida e é contínua em $\mathbb{R}^+$ (justifique...), logo é integrável em cada subconjunto compacto contido em $\mathbb{R}^+$.

   Para cada $u>0$ defina-se $\varphi(u)=\int_1^u \cos\left(\sqrt{t}\right)\,dt$ (o extremo inferior do integral indefinido foi fixado arbitrariamente em $\mathbb{R}^+$). Pelo Teorema Fundamental do Cálculo conclui-se que φ é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e que, para cada $u\in\mathbb{R}^+$, $\varphi'(u)=\cos(\sqrt{u})$.

   Então, uma vez que, para cada $x\neq 0$, $[x^2,x^4]$ se $|x|>1$, ou $[x^4,x^2]$ se $|x|\leq 1$, está contido em $\mathbb{R}^+$, tem-se

$$\int_{x^2}^{x^4}\frac{\cos(\sqrt{t})}{x}\,dt=\frac{1}{x}\left(\int_1^{x^4}\cos(\sqrt{t})\,dt+\int_{x^2}^{1}\cos(\sqrt{t})\,dt\right)=\frac{\varphi(x^4)-\varphi(x^2)}{x}.$$

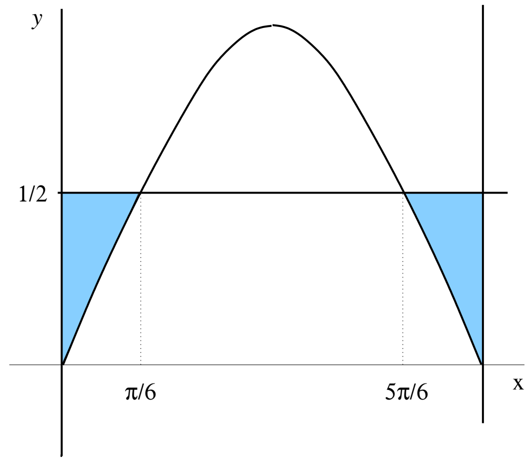
   Ora,

$$\frac{\big(\varphi(x^4)-\varphi(x^2)\big)'}{(x)'}=4x^3\varphi'(x^4)-2x\varphi'(x^2)=4x^3\cos(x^2)-2x\cos x\,.$$

   Logo, pela regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to 0}\int_{x^2}^{x^4}\frac{\cos(\sqrt{t})}{x}\,dt=\lim_{x\to 0}(4x^3\cos(x^2)-2x\cos x)=0.$$

4. O conjunto A encontra-se a sombreado:



$$\begin{aligned}
\text{Área de } A &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} - \operatorname{sen} x\right)\, dx + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \operatorname{sen} x\right)\, dx \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} - \operatorname{sen} x\right)\, dx \\
&= 2\left[\frac{x}{2} + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\
&= \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 2\,.
\end{aligned}$$

5. Seja f periódica de período $T > 0$, ou seja, $f(x) = f(x+T)$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

Assuma-se, em primeiro lugar que φ é periódica de período T. Tem-se, em particular $\varphi(T) - \varphi(0) = 0$ e, como $\varphi(0) = 0$, vem

$$\varphi(T) = \int_0^T f = 0.$$

Reciprocamente, suponhamos que esta última igualdade ocorre. Como f é contínua em $\mathbb{R}$, usando o Teorema Fundamental do Cálculo e a T-periodicidade de f, resulta

$$(\varphi(x+T) - \varphi(x))' = f(x+T) - f(x) = 0,$$

deduzindo-se que a função $x \mapsto \varphi(x+T) - \varphi(x)$ é constante em $\mathbb{R}$ tomando, em x arbitrário, valor igual ao que toma em $x = 0$:

$$\forall_{x\in\mathbb{R}}\,, \quad \varphi(x+T) - \varphi(x) = \varphi(T) - \varphi(0) = \int_0^T f = 0.$$

Logo φ é periódica de período T.

6 1. Dado que f é contínua no intervalo compacto $[a,b]$ sabemos, pelo teorema de Weierstrass, que existem $\alpha, \beta \in [a,b]$ tais que

$$\forall_{x\in[a,b]} \quad f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta).$$

Dado que $g \geq 0$ em $[a,b]$,

$$\forall_{x\in[a,b]} \quad f(\alpha)g(x) \leq f(x)g(x) \leq f(\beta)g(x)\,.$$

Uma vez que f e g são contínuas em $[a,b]$, o que implica também a continuidade do produto fg, todos os membros da dupla desigualdade anterior são integráveis e

$$f(\alpha)\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq f(\beta)\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Suponhamos que $\int_a^b g \neq 0$. Então, como por hipótese g é não negativa em $[a,b]$, conclui-se que $\int_a^b g > 0$ e, das desigualdades anteriores conclui-se:

$$f(\alpha) \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leq f(\beta)\,.$$

Dada a continuidade de f em $[a,b]$, pelo teorema do valor intermédio, podemos concluir que existe $c \in [a,b]$ tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}\,.$$

Desta desigualdade se deduz imediatamente o resultado pretendido.

No caso $\int_a^b g = 0$, dado que g é contínua e $g \geq 0$ em $[a,b]$, conclui-se que $\forall x \in]a,b[\,,\ g(x) = 0$ (se existisse $\alpha \in]a,b[$ em que $g(\alpha) > 0$, então, por continuidade de g se concluiria que $g > 0$ numa vizinhança de α e o integral em $[a,b]$ seria necessariamente positivo). Neste caso o resultado pretendido é trivial.

2. Tome-se, para $x \in [0,1]$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ e $g(x) = x^n$. É fácil ver que ambas são contínuas em $[0,1]$ (justifique...) e que $g(x) \geq 0$, para cada $x \in [0,1]$. Logo, estamos nas condições de aplicação do resultado de 1., o que nos permite afirmar que existe $c \in [0,1]$ tal que

$$\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x+1}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{c+1}}\int_0^1 x^n\,dx$$

Como, para todo $x \in [0,1]$, e em particular para $x = c$, se tem

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x+1}} \leq 1$$

e

$$\int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

o resultado sai imediatamente.