



ANÁLISE MATEMÁTICA II

Exercícios Suplementares 5

(Eng^a e Arquitectura Naval, Eng^a Civil, Eng^a do Território)

Fórmula de Taylor.

1. Demonstre a seguinte desigualdade

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x, \quad x \geq 0.$$

(Sugestão : aplique a fórmula de Taylor de primeira e segunda ordem.)

2. Considere uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que existem $n \in \mathbb{N}$ e constantes $M \geq 0, \alpha > 1$ verificando

$$\left| f^{(n)}(x) - f^{(n)}(y) \right| \leq M |x - y|^\alpha, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Mostre sucessivamente que:

- a) $f^{(n)}$ é diferenciável em \mathbb{R} e $f^{(n+1)}(x) = 0, x \in \mathbb{R}$;
b) $f(x)$ é um polinómio de grau inferior ou igual a n .

3. De seguida pretende-se fornecer uma prova do bem conhecido binómio de Newton

$$(a + b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j b^{n-j}, \quad n, j \in \mathbb{N}, j \leq n, a, b \in \mathbb{R}.^\dagger \quad (1)$$

Dividimos a prova nas seguintes etapas:

- a) usando indução matemática mostre que

$$\frac{d^j}{dx^j} (1 + x)^n = \frac{n!}{(n-j)!} (1 + x)^{n-j};$$

- b) por intermédio da fórmula de Taylor, retire da alínea anterior que

$$(1 + x)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j, \quad x \in \mathbb{R};$$

[†]No binómio convencionamos $0^0 = 1$.

c) da alínea anterior deduza a fórmula (1).

4. Seja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Suponha que $f^{(n)}(x)$ existe para todo o $x \in \mathbb{R}$, e que $f'(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0$.

a) Se n é ímpar e a função f verifica

$$f^{(n)}(x)(x - a) > 0 \quad (< 0), \quad \text{se } x \neq a,$$

então a é um ponto de mínimo (máximo) de f .

b) Se n é par e a função f verifica

$$f^{(n)}(x) > 0 \quad (< 0), \quad \text{se } x \neq a.$$

então a é um ponto de mínimo (máximo) de f .

5. Mostre que a função $u(x, y, t) = t^{-1}e^{-(x^2+y^2)/4\lambda t}$ satisfaz a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right], \quad t > 0.$$

6. Seja $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, tal que satisfaz a equação:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \tag{2}$$

Considere $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(u, v) = f(u^2 - v^2, 2uv)$. Mostre que g satisfaz (2).

7. Mostre que não existe nenhuma função real $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, tal que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -\sin y, \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = e^x.$$

8. Determine a fórmula de MacLaurin de 2^a ordem das seguintes funções:

- a) $f(x, y) = e^x \sin y$,
- b) $g(x, y) = \cos x \cos y$,
- c) $h(x, y) = \cos(xy)$,
- d) $l(x, y) = \sin(x + y)$.

9. Determine o polinómio de Taylor de segunda ordem, relativo ao ponto $(2, 1)$, da função $\psi(x, y) = y^x$. Deduza um valor aproximado de $(0, 95)^{2,01}$.

10. Escreva a função polinomial $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4$ em potências de $x - 1$, $y - 1$ e $z - 1$.

11. Considere uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ verificando a equação (2). Suponha que o determinante da matriz hessiana $H_{(x,y)}f$, é não nulo, i.e., $\det H_{(x,y)}f \neq 0$, se $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é um ponto de estacionaridade de f . Prove que f não tem extremos.

12. Sejam $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^2 . Considere a função composta $f = \psi \circ \varphi$, e mostre sucessivamente que:

a) se $\psi'(\varphi(x, y)) = 0$, então (x, y) é um ponto de estacionaridade para a função f e os critérios de 2ª ordem não são conclusivos para determinar se (x, y) é ponto de extremo da função f ;

b) se $\varphi(x, y)$ é ponto de extremo da função ψ então (x, y) é ponto de extremo da função f ;

c) verifique que é possível $\psi'(\varphi(0, 0)) = 0$, o ponto $\varphi(0, 0)$ não ser ponto de extremo de ψ , e no entanto $(0, 0)$ é extremo de f .

(Sugestão : considere $\psi(u) = u^3$, e φ verificando $\varphi(x, y) \geq 0$, com $\varphi(0, 0) = 0$.)

Soluções

8.

a) $y + yx$ b) $1 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ c) 1 d) $x + y$.

9. O polinómio de Taylor de 2^a ordem de ψ é $1 + 2(y-1) + (x-2)(y-1) + (y-1)^2$. O valor aproximado de $(0,95)^{2,01}$, dado pelo polinómio de Taylor de 2^a ordem é 1,001.

10. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + 2(x-1)(y-1) - (z-1)(y-1)$