Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA II

Exercícios Suplementares 4

(Eng^a e Arquitectura Naval, Eng^a Civil, Eng^a do Território)

Diferenciabilidade.

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida através da expressão

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

   a) Calcule as derivadas parciais de f.

   b) Mostre que as derivadas parciais de f não são contínuas em $(0,0)$.

   c) Determine, caso existam,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right](0,0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right](0,0).$$

2. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida através da expressão

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2}\sin(x^2+y^2).$$

   a) Supondo que f é prolongável por continuidade a $(0,0)$ e que $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é o seu prolongamento, determine $F(0,0)$.

   b) Mostre que f é prolongável por continuidade a $(0,0)$.

   c) Determine $D_{(\nu_1,\nu_2)}F(0,0)$ com $\nu_1, \nu_2 \neq 0$, e verifique que

$$D_{(\nu_1,\nu_2)}F(0,0) \neq \nabla F(0,0) \cdot (\nu_1,\nu_2).$$

   d) Justifique que F não é diferenciável em $(0,0)$.

3. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4 x}{x^2+y^4}\arcsin(xy) & \text{se } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

   Estude a diferenciabilidade de g na origem.

4. Seja $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, diferenciável em $(1,2)$ tal que $D_{(1,1)}\psi(1,2) = \boldsymbol{e}_1$ e $D_{(-1,1)}\psi(1,2) = 2\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_1$. Calcule a matriz Jacobiana de ψ no ponto $(1,2)$.

5. Em $\mathbb{R}^3$ sejam $\boldsymbol{r}(x,y,z) = (x,y,z)$ e $r(x,y,z) = \|\boldsymbol{r}(x,y,z)\|$.

   a) Mostre que $\nabla r(x,y,z)$ é um vector unitário com a direcção de $\boldsymbol{r}(x,y,z)$.

   b) Mostre que $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\boldsymbol{r}$, se n é um natural positivo.

   c) Encontre um campo escalar f tal que $\nabla f = \boldsymbol{r}$.

6. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tais que

$$f(x,y) = e^{x+2y}\mathbf{e}_1 + \sin(y+2x)\mathbf{e}_2,$$

$$g(u,v,w) = (u + 2v^2 + 3w^3)\mathbf{e}_1 + (2v - u^2)\mathbf{e}_2.$$

   a) Calcule as matrizes jacobianas $M_{(x,y)}f$ e $M_{(u,v,w)}g$.

   b) Determine a função composta $h(u,v,w) = f[g(u,v,w)]$, e calcule a matriz jacobiana $M_{(u,v,w)}h$;

   c) Usando o teorema da derivação da função composta, calcule a matriz jacobiana $M_{(u,v,w)}h$.

7. Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ duas funções tais que $g(x,y) = \left(e^{xy}, e^{x^2y}, xy\right)$, f é diferenciável em $\mathbb{R}^3$, toma o valor $(1,0)$ em $(1,1,0)$ e

$$M_{(1,1,0)}f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Justifique que $g \circ f$ e $f \circ g$ são diferenciáveis e identifique as aplicações $(g \circ f)'(1,1,0)$ e $(f \circ g)'(1,0)$.

8. Calcule $F'(t)$ e $F''(t)$ nos casos em que a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

   a) $F(t) = f[g(t)]$, com $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\quad g(t) = t\mathbf{e}_1 + t^2\mathbf{e}_2$,

   b) $F = f \circ g$, com $f(x,y) = \int_0^{x^2+2y^2-1} e^{u^2}\, du$, $\quad g(t) = (\cos t, \sin t)$,

9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Mostre que $u(x,y) = f(xy)$, satisfaz a equação

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

10. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, diferenciável em $\mathbb{R}^3$, tal que $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ em $\mathbb{R}^3$. Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diferenciável em $\mathbb{R}^2$, tal que

$$F(x,y,\varphi(x,y)) = 0. \tag{1}$$

   Determine as derivadas parciais de φ em função das derivadas parciais de F.

   (**Sugestão**: derive ambos os membros de (1) em ordem a x e a y).

11. Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e homogénea de grau α, i.e. tal que

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x, y), \forall_{\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, (x,y) \in \mathbb{R}^2}.$$

i) Mostre que as funções derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são homogéneas de grau $\alpha - 1$;

ii) Para cada vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ defina a função real de variável real

$$g_{(x,y)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g_{(x,y)}(\lambda) = f(\lambda x, \lambda y).$$

Mostre que

$$g'_{(x,y)}(\lambda) = \alpha \lambda^{\alpha - 1} f(x, y) = (x, y) \cdot \nabla f(\lambda x, \lambda y);$$

iii) Das alíneas anterior deduza a *identidade de Euler*, i.e.,

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y);$$

Soluções

1a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \left[\dfrac{2xy}{x^2+y^2} - \dfrac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}\right]\cos\left(\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \left[\dfrac{x^2}{x^2+y^2} - \dfrac{2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]\cos\left(\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

1c) $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ não existe.

2a) $F(0,0) = 0$.

2c) $D_{(\nu_1,\nu_2)}F(0,0) = \frac{\nu_1^2\nu_2}{\nu_1^2+\nu_2^2}$.

4) $M_{(1,2)}\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

5c) $f(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2,y^2,z^2)$.

6a) $M_{(x,y)}f = \begin{bmatrix} e^{x+2y} & 2e^{x+2y} \\ 2\cos(y+2x) & \cos(y+2x) \end{bmatrix}$,

$$M_{(u,v,w)}g = \begin{bmatrix} 1 & 4v & 9w^2 \\ -2u & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

6b) $h(u,v,w) = e^{u-2u^2+4v+2v^2+3w^3}\mathbf{e}_1 + \sin(2u-u^2+2v+4v^2+6w^3)\mathbf{e}_2$

$$M_{(u,v,w)}h = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial h_1}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial h_1}{\partial w}(u,v,w) \\ \frac{\partial h_2}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial h_2}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial h_2}{\partial w}(u,v,w) \end{bmatrix},$$

sendo

$\frac{\partial h_1}{\partial u}(u,v,w) = (1-4u)\,e^{u-2u^2+4v+2v^2+3w^3}$

$\frac{\partial h_1}{\partial v}(u,v,w) = (4+4v)\,e^{u-2u^2+4v+2v^2+3w^3}$

$\frac{\partial h_1}{\partial w}(u,v,w) = 9w^2e^{u-2u^2+4v+2v^2+3w^3}$

$\frac{\partial h_2}{\partial u}(u,v,w) = (2-2u)\cos(2u-u^2+2v+4v^2+6w^3)$

$\frac{\partial h_2}{\partial v}(u,v,w) = (2+8v)\cos(2u-u^2+2v+4v^2+6w^3)$

$\frac{\partial h_2}{\partial w}(u,v,w) = 18w^2\cos(2u-u^2+2v+4v^2+6w^3)$

7) $(g \circ f)'(1,1,0)(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (x+y, x+y, x+y),$

$(f \circ g)'(1,0)(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (2y, 2y).$

8a) $F'(t) = 2t + 4t^3,\ F''(t) = 2 + 12t^2$

8b) $F'(t) = e^{(\sin t)^4} \sin(2t),\ F''(t) = 2\sin^2(2t)(\sin t)^2 e^{(\sin t)^4} + 2e^{(\sin t)^4}\cos(2t)$

10) $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))}$

$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))}$