Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA II

Exercícios Suplementares 3

(Eng^a e Arquitectura Naval, Eng^a Civil, Eng^a do Território)

Estruturas algébrica e topológica de $\mathbb{R}^n$. Continuidade e Limites.

1. Considere os seguintes conjuntos:
   $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$
   $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1 \wedge 4x^2 + y^2 \le 4\}$
   $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \le 1\}$
   $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > |y|\}$
   $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x| + |y| \le 2\}$
   $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \cos(x+y) \le 0\}$
   $G = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \sin \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \ge 0\right\}.$

   a) Esboce os conjuntos anteriores e ainda $A \cap D$ e $A \times [0,1]$.

   b) Para cada um dos conjuntos acima determine o seu interior, exterior, fronteira, aderência e diga, justificando, se é aberto, fechado, limitado, compacto, conexo.

   c) Dê, quando possível, exemplos de sucessões nas condições seguintes, justificando cuidadosamente as respostas:
   (i) $(\mathbf{x}_n)$ de termos em front D tal que $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, com $\mathbf{x} \in A$.
   (ii) $(\mathbf{x}_n)$ de termos em $A \setminus D$ tal que $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, com $\mathbf{x} \in D$.
   (iii) $(\mathbf{x}_n)$ de termos em G tal que $\mathbf{x}_n \to \mathbf{0}$.
   (iv) $(\mathbf{x}_n)$ de termos em $E \cap D$, convergente para um ponto de D^c.
   (v) $(\mathbf{x}_n)$ de termos em $E \cap D$, divergente, e sem sublimites em D.
   (vi) $(\mathbf{x}_n)$ de termos em E, divergente, sem subsucessões convergentes.
   (vii) $(\mathbf{x}_n)$ de termos em C, divergente, sem subsucessões convergentes.

2. Seja $\|.\|$ a norma euclideana em $\mathbb{R}^n$. Mostre sucessivamente que:

   i) $\|.\|$ é uma função ilimitada;

   ii) para qualquer que seja $y \in \mathbb{R}^n$, verifica-se

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \frac{\|x-y\|}{\|x\|} = 1.$$

3. Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}^m$. Se C é um dos conjuntos $A \cup B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{x} \in A \vee \mathbf{x} \in B\}$, ou $A \cap B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{x} \in A \wedge \mathbf{x} \in B\}$, mostre que são verdadeiras, ou exiba um contra-exemplo se forem falsas, as seguintes proposições:
(i) Se A e B são limitados, então C é limitado.
(ii) Se A e B são compactos, então C é compacto.
(iii) Se A e B são conexos, então C é conexo.

4. Escreva uma equação cartesiana do plano que contém os pontos $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3 - 3\mathbf{e}_1$ de $\mathbb{R}^3$. Esboce a sua intersecção com o primeiro octante de $\mathbb{R}^3$.

5. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Para cada $c \in \mathbb{R}$, considere o conjunto

$$N_c = \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, f(x) = c\} \, .$$

a) Mostre que, se f é contínua, N_c é fechado, qualquer que seja $c \in \mathbb{R}$.

b) Forneça um exemplo de uma função f e de $c \in \mathbb{R}$, tal que N_c não seja fechado.

6. Calcule ou mostre que não existem (em $\mathbb{R}$), os seguintes limites:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5}{x^4+2y^2}$, b) $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\log^2(x+y)}{\sin \log(x+y)}$,

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$, d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3y^2}{(x^4+2y^2)^2}$,

e) $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x-1}{x-1+y-\log x}$

7. Seja $f(x, y) = 0$ se $y \leq 0$ ou se $y \geq x^2$, e seja $f(x, y) = 1$, se $0 < y < x^2$. Mostre que $f(x, y) \to 0$, quando $(x, y) \to (0, 0)$ ao longo de qualquer recta que passe pela origem. Encontre uma curva que passe pela origem ao longo da qual f toma o valor 1, excepto na origem. Será f contínua na origem? Justifique.

8. Determinar o domínio e o conjunto de pontos de descontinuidade de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x, y) = \sqrt{(1 - x^2 - y^2)H(1 - x^2 - y^2)}$, onde $H(\cdot)$ é a função de Heaviside.

b) $\psi(x, y) = x^{y^2}$

c) $g(x, y) = \arccos \sqrt{x/y}$

d) $\boldsymbol{\varphi}(x, y, z) = \left(\log \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, (1 - x^2 - y^2 - z^2)^{-1}\right)$

e) $h(u, v, w) = \tan \frac{u^2}{vw}$

9. Considere a função

$$\theta(x,y) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{y} & \text{se } y \neq 0\,, \\ 0 & \text{se } y = 0\,. \end{cases}$$

Mostre que $\theta(x,y) \to 0$ quando $(x,y) \to 0$ mas que o limite iterado $\lim_{x\to 0} \lim_{y \to 0} \theta(x,y)$ não existe.

10. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\tan(x\sqrt{|y|})}{x^2 + |y|} & \text{se } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) Mostre que $\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \lim_{x \to 0} f(x,y) = 0\,.$

b) Mostre que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

c) Verifique que existem as derivadas parciais de f em $(0,0)$ e diga qual o seu valor.

Soluções

1b)

$\operatorname{int} A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}, \quad \operatorname{ext} A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\right\}$
$\operatorname{front} A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}, \quad \overline{A} = A.$
O conjunto $A \neq \emptyset$ é compacto e conexo.

$\operatorname{int} B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x^2 + y^2 > 1\right) \wedge \left(4x^2 + y^2 < 4\right)\right\},$
$\operatorname{ext} B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x^2 + y^2 < 1\right) \vee \left(4x^2 + y^2 > 4\right)\right\},$
$\operatorname{front} B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x^2 + y^2 = 1\right) \vee \left(4x^2 + y^2 = 4\right)\right\},$
$\overline{B} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x^2 + y^2 \geq 1\right) \wedge \left(4x^2 + y^2 \leq 4\right)\right\}.$
O conjunto B não é aberto, não é fechado, é limitado e não é conexo.

$\operatorname{int} C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1\right\},$
$\operatorname{ext} C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\right\},$
$\operatorname{front} C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\right\},$
$\overline{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 1\right\}.$
O conjunto $C \neq \mathbb{R}^2$ é fechado, não é limitado e é conexo.

$\operatorname{int} D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x < y < x\right\},$
$\operatorname{ext} D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x \vee y < -x\right\},$
$\operatorname{front} D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y = x \vee y = -x) \wedge (x \geq 0)\right\},$
$\overline{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x \leq y \leq x\right\}.$
O conjunto $D \neq \mathbb{R}^2$ é aberto, não é limitado e é conexo.

$\operatorname{int} E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ((1 < x + y < 2) \vee (-2 < x + y < -1)) \wedge (xy \geq 0)\right\}$
$\quad \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ((1 < x - y < 2) \vee (-2 < x - y < -1)) \wedge (xy < 0)\right\}$
$\operatorname{ext} E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x + y > 2) \vee (x + y < -2) \vee (y - x > 2) \vee (y - x < -2)\right\}$
$\quad \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (-1 < y - x < 1) \wedge (-1 < y + x < 1)\right\},$
$\operatorname{front} E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ((x + y = \pm 2) \vee (x + y = \pm 1)) \wedge (xy \geq 0)\right\}$
$\quad \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ((y - x = \pm 2) \vee (y - x = \pm 1)) \wedge (xy \leq 0)\right\},$
$\overline{E} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ((1 \leq x + y \leq 2) \vee (-2 \leq x + y \leq -1)) \wedge (xy \geq 0)\right\}$
$\quad \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ((1 \leq x - y \leq 2) \vee (-2 \leq x - y \leq -1)) \wedge (xy < 0)\right\}.$
O conjunto E não é fechado, não é aberto, é limitado e é conexo.

1b)(continuação)

$\operatorname{int} F = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \dfrac{\pi}{2}(1+4k) < x+y < \dfrac{\pi}{2}(3+4k)\right\},$

$\operatorname{ext} F = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \dfrac{\pi}{2}(-1+4k) < x+y < \dfrac{\pi}{2}(1+4k)\right\},$

$\operatorname{front} F = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y = \dfrac{\pi}{2}(1+4k) \vee x+y = \dfrac{\pi}{2}(3+4k)\right\},$

$\overline{F} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \dfrac{\pi}{2}(1+4k) \le x+y \le \dfrac{\pi}{2}(3+4k)\right\}.$

O conjunto $F \neq \mathbb{R}^2$ é fechado, não é limitado e não é conexo.

$\operatorname{int} G = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_1} \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \dfrac{1}{\pi^2(2k+1)^2} < x^2+y^2 < \dfrac{1}{4k^2\pi^2}\right\} \cup \left[\overline{B}_\pi(0)\right]^c,$

$\operatorname{ext} G = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \dfrac{1}{4\pi^2(1+k)^2} < x^2+y^2 < \dfrac{1}{\pi^2(2k+1)^2}\right\},$

$\operatorname{front} G = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_1} \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = \dfrac{1}{\pi^2(2k-1)^2} \vee x^2+y^2 = \dfrac{1}{4k^2\pi^2}\right\} \cup \{(0,0)\},$

$\overline{G} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_1} \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \dfrac{1}{\pi^2(2k+1)^2} \le x^2+y^2 \le \dfrac{1}{4k^2\pi^2}\right\} \cup [B_\pi(0)]^c \cup \{(0,0)\}.$

O conjunto G não é fechado, não é aberto, não é limitado e não é conexo.

1c)

i) $x_n = 0,\ n\in\mathbb{N},$ ii) não é possível, iii) $x_n = \left(\left(\pi\sqrt{2n(2n+1)}\right)^{-1}, 0\right),\ n\in\mathbb{N}_1,$

v) $x_n = \left(1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right), n\in\mathbb{N}_1,$ iv) $x_n = \left(1, (-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)\right), n\in\mathbb{N}_1,$

vi) não é possível, vii) $x_n = (n,-n), n\in\mathbb{N}.$

3)

i) verdadeira ii) verdadeira iii) verdadeira, se $C = A\cap B$.

Falsa, se $C = A\cup B$. Por exemplo $A = \{(0,\cdots,0)\}\subset\mathbb{R}^m,\ B = \{(1,\cdots,1)\}\subset\mathbb{R}^m$.

4)

$4(x-1)+4y+z=0.$

5b)

$c=1,\ f(x)=1,$ se $x\in B_1(0)\subset\mathbb{R}^n,$ e $f(x)=0,$ caso contrário.

6)

a) 0, b) 0, c) não existe, d) não existe, e) não existe.

8)

a) $D_f = \mathbb{R}^2$; f é contínua no seu domínio ,

b) $D_\psi = \{(x,y) : x > 0\}$; ψ é contínua no seu domínio ,

c) $D_g = \{(x,y) : (0 < x < y) \vee (0 > x > y)\}$; g é contínua no seu domínio ,

d) $D_\varphi = \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \cup \operatorname{front} B_1(0))$; φ é contínua no seu domínio ,

e) $D_h = \{(x,y,z) : y \neq 0 \wedge z \neq 0\}$; h é contínua no seu domínio.

10c)

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$