



ANÁLISE MATEMÁTICA II

Exercícios Suplementares 1

(Eng^a e Arquitectura Naval, Eng^a Civil, Eng^a do Território)

Primitivação

1. Calcule uma primitiva de cada uma das funções:

- | | | |
|---------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| a) $\sqrt{2x} + \sqrt{\frac{x}{2}}$, | b) $3 \sin x + 2x^2$, | c) $\frac{x^2}{1+x^3}$, |
| d) xe^{-x^2} , | e) $\frac{3 \sin x}{(1+\cos x)^2}$, | f) $x\sqrt{1+x^2}$, |
| g) $e^{2 \sin x} \cos x$, | h) $\frac{1}{1+e^x}$, | i) $\tan x$, |
| j) $\frac{1}{2+x^2}$, | l) $\tan^2 x$, | m) $\cos^3 x \sin^3 x$, |
| n) $\frac{1}{(1+x^2) \arctan x}$, | o) $\frac{x}{1+x^4}$, | p) $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$, |
| q) $\frac{1}{1+3x^2}$, | r) $\frac{e^x}{e^{2x}+4}$, | s) $\sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}$, |
| t) $\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$, | u) $\frac{x}{\sqrt{1-2x^4}}$, | v) $\frac{1}{(x+1)(x-2)}$, |
| x) $\frac{1}{(x+1)^2}$, | z) $\frac{1}{(x^2+1)^2}$. | |

2. Calcule uma primitiva de cada uma das funções:

- | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| a) $\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}$, | b) $\frac{x^4}{x^4-1}$, | c) $\frac{x^5}{x^2-1}$, |
| d) $\frac{x}{x^2+2x+3}$, | e) $\frac{x}{(x+1)(x+2)^2}$, | f) $\frac{x^3+2x^2+2x}{(x+1)^2}$, |
| g) $\frac{x^5}{(x^3+1)(x^3+8)}$, | h) $\frac{x^3+4x^2-4x}{x^4-16}$, | i) $\frac{1}{x(x^5+1)^2}$. |

Em seguida, determine *todas* as primitivas de cada uma das funções anteriores (nos respectivos domínios).

3. Usando o método de primitivação por partes, calcule uma primitiva de cada uma das funções:

- | | | |
|-----------------------------------|---|-----------------------------|
| a) $e^x(e^x + x)$, | b) $e^x \sin x$, | c) $x^3 e^{-x^2}$, |
| d) $\arctan x$, | e) $\arcsin x$, | f) $x(1 + x^2) \arctan x$, |
| g) $\frac{x^5}{\sqrt{1 + x^3}}$, | h) $\log\left(\frac{1}{x} + 1\right)$, | i) $x^2 \log^2 x$, |
| j) $\log^2 x$, | k) $\frac{1}{x^3} \cos \frac{1}{x}$, | l) $\cos 2x \log(\tan x)$, |
| m) $3x\sqrt{1 - x^2} \arcsin x$, | n) $\frac{x \cos x}{\sin^2 x}$. | |

4. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções, utilizando substituições apropriadas:

- | | | |
|---|---|----------------------------------|
| a) $\frac{e^{4x}}{e^{2x} + 1}$, | b) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}(1 + \sqrt[3]{x^4})}$, | c) $\frac{\sqrt{x-1}}{x}$, |
| d) $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x+1}}$, | e) $x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, | f) $\frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}$, |
| g) $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$, | h) $\frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$, | i) $\sqrt{1 - x^2}$, |
| j) $\frac{\log x}{x(\log x - 1)^2}$, | k) $\frac{1}{1 + \sin x + \cos x}$. | |

5. Determine, usando a substituição indicada, uma primitiva de cada uma das funções seguintes:

- | | |
|--|--|
| a) $\sec x$, $t = \sin x$, | b) $\frac{1}{x^2\sqrt{x^2 - 1}}$, $x = \sec t$, |
| c) $\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$, $x = \cosh t$, | d) $\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^4}$, $x = \cos t$, |
| e) $\frac{e^{x/2}}{\sqrt{1 - e^x}}$, $t = \sqrt{1 - e^x}$, | f) $\frac{\sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}}$, $x = t^6 - 1$, |
| g) $\frac{\sin x}{1 - \sin x}$, $\tan \frac{x}{2} = t$, | h) $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$, $x = \sin^2 t$, |
| i) $\sqrt{1 - 2x - x^2}$, $x = t - 1$, $t = \sqrt{2} \sin s$, | j) $\frac{1}{(x+1)^2\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$, $x + 1 = \tan t$, |
| k) $\frac{1}{(x+1)^2\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$, $x + 1 = \sinh t$, | l) $\frac{\sin x}{1 + 3 \cos^2 x}$, $t = \cos x$. |

6. Determine, utilizando métodos de primitivação adequados, uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

- | | | |
|---|--|---|
| a) $ x $, | b) $x \arcsin \frac{1}{x}$, | c) $\sqrt{1 + \sqrt{x}}$, |
| d) $\sin(\log x + 1)$, | e) $\cos^3 x \sqrt{\sin x}$, | f) $\sqrt{x} \arctan \sqrt{x}$, |
| g) $\frac{1 + \log^2 x}{x(1 + \log x)}$, | h) $\frac{3 \sin x + 3}{\cos x + \sin 2x}$, | i) $\frac{e^{-x}}{e^{2x} - 2e^x + 2}$, |
| j) $\cos x \log(1 + \sin^2 x)$, | l) $\frac{x \log x}{\sqrt{1 - x^2}}$, | m) $\frac{1 + x}{1 + \sqrt{x}}$, |
| n) $\cos^3 x$, | o) $\cos^4 x$, | p) $\frac{5x}{\sqrt{1 + x^4}}$, |
| q) $\frac{1}{x^8 + x^6}$, | r) $x(\arctan x)^2$, | s) $x \log \frac{1 - x}{1 + x}$, |
| t) $\sinh^2 x$, | u) $\frac{1}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)}$. | |

7. Mostre que, para $n \in \mathbb{N}_1$, é válida a seguinte fórmula de recorrência:

$$P(\log^n |x|) = x \log^n |x| - nP(\log^{n-1} |x|), \quad x \neq 0.$$

Aproveite o resultado anterior para calcular todas as funções $F(x)$ tais que $F'(x) = \log^2 |x|$, e que verificam a condição $F(1) + F(-1) = 0$.

8. Utilizando o método de primitivação por partes, determine primitivas das funções $\sec^3 x$ e $\sec^4 x$. Mostre que, para inteiros $n \geq 2$, é válida a expressão

$$P(\sec^n x) = \frac{1}{n-1} \tan x \sec^{n-2} x + \frac{n-2}{n-1} P(\sec^{n-2} x).$$

9. Determine uma função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que verifique as condições seguintes:

$$\varphi''(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi'(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \frac{\pi}{2}.$$

10. Determine a função $\psi :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as condições

$$\psi''(x) = \frac{1}{1+x}, \quad \forall x > -1, \quad \psi(0) = \psi'(0) = 1.$$

11. Prove que a função de Heaviside *não* é primitivável em \mathbb{R} .
(Sugestão: argumente por redução ao absurdo).

Soluções

1.

- | | | |
|--|---|--|
| a) $\sqrt{2x^3}$, | b) $3 \cos x + \frac{2}{3}x^3$, | c) $\frac{1}{3} \log 1 + x^3 $, |
| d) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$, | e) $\frac{3}{1 + \cos x}$, | f) $\frac{1}{3} (1 + x^2)^{3/2}$, |
| g) $\frac{1}{2}e^{2 \sin x}$, | h) $-\log(1 + e^{-x})$, | i) $\log \cos x $, |
| j) $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}}$, | l) $\tan x - x$, | m) $\frac{1}{4} \sin^4 x - \frac{1}{6} \sin^6 x$, |
| n) $\log \arctan x $, | o) $\frac{1}{2} \arctan(x^2)$, | p) $2 \arctan(\sqrt{x})$, |
| q) $\frac{\sqrt{3}}{3} \arctan(\sqrt{3}x)$, | r) $\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{2}e^x\right)$, | s) $\frac{2}{3} \sqrt{(\arcsin x)^3}$, |
| t) $\frac{1}{2} \arcsin(2x)$, | u) $\frac{1}{2\sqrt{2}} \arcsin(\sqrt{2}x^2)$, | v) $\log \sqrt[3]{\left \frac{x-2}{x+1}\right }$, |
| x) $-\frac{1}{x+1}$, | z) $\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctan x$. | |

2.

- a) $2 \log |x - 1| - \log |x| + \frac{1}{x}$, b) $x + \frac{1}{4} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \arctan x$,
- c) $\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \log |x^2 - 1|$, d) $\frac{1}{2} \log(x^2 + 2x + 3) - \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x + 1) \right]$,
- e) $\log \left| \frac{x+2}{x+1} \right| - \frac{2}{x+2}$, f) $\frac{x^2}{2} + \log |x + 1| + \frac{1}{x+1}$,
- g) $\frac{1}{21} (8 \log |x^3 + 8| - \log |x^3 + 1|)$, h) $\frac{1}{2} \log(x^2 + 4) + \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \log \left| \frac{x-2}{x+2} \right|$,
- i) $\log |x| - \frac{1}{5} \log |x^5 + 1| + \frac{1}{5(x^5+1)}$.

Exemplo de solução da segunda parte de 2.:

$$a) \begin{cases} 2 \log(x - 1) - \log x + 1/x + K_1, & \text{se } x > 1; \\ 2 \log(1 - x) - \log x + 1/x + K_2, & \text{se } 0 < x < 1; \\ 2 \log(1 - x) - \log(-x) + 1/x + K_3, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

em que K_1, K_2, K_3 são constantes reais arbitrárias.

3.

- | | |
|---|--|
| a) $e^x(e^x + x - 1) - e^{2x}/2$, | b) $e^x(\sin x - \cos x)/2$, |
| c) $e^{-x^2}(x^2 + 1)/2$, | d) $x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1 + x^2)$, |
| e) $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$, | f) $\frac{1}{4}(1 + x^2)^2 \arctan x - x/4 - x^3/12$, |
| g) $\frac{2}{3}x^3\sqrt{1 + x^3} - \frac{4}{9}(1 + x^3)^{2/3}$, | h) $x \log(1/x + 1) + \log x + 1 $, |
| i) $\frac{x^3}{3} \log^2 x - \frac{2}{9}x^2 \log x + \frac{2}{27}x^3$, | j) $x \log^2 x - 2x \log x + 2x$, |
| k) $-\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, | l) $\frac{1}{2} \sin(2x) \log(\tan x) - x$, |
| m) $-(1 - x^2)^{3/2} \arcsin x + x - x^3/3$, | n) $-\frac{x}{\sin x} + \log \tan \frac{x}{2} $. |

4.

- | | | |
|--|---|---|
| a) $\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2} \log(e^{2x} + 1)$, | b) $\frac{3}{2} \arctan \sqrt[3]{x^2}$, | c) $2\sqrt{x-1} - 2 \arctan \sqrt{x-1}$, |
| d) $\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - \frac{3}{2}\sqrt[6]{x^2} + 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} - 3 \log 1 + \sqrt[3]{x} + 6 \arctan \sqrt[6]{x}$, | | |
| e) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{2}(x-2) + \frac{1}{2} \log x + \sqrt{x^2+1} $, | f) $-2 \arctan \sqrt{1-x}$, | |
| g) $\log \cos x + \log \tan x + 1 $, | h) $\log(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x})$, | |
| i) $\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x$, | j) $\log \log -1 - \frac{1}{\log x - 1}$, | |
| k) $\log 1 + \tan \frac{x}{2} $. | | |

5.

- | | | |
|---|--|---|
| a) $\frac{1}{2} \log \left \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right $, | b) $\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$, | c) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2} \log x + \sqrt{x^2-1} $, |
| d) $-\frac{1}{3} \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right)^{3/2}$, | e) $-2 \arcsin \sqrt{1 - e^x}$, | |
| f) $\frac{6}{7}(x+1)^{7/6} - \frac{6}{5}(x+1)^{5/6} + 2(x+1)^{1/2} - 6(x+1)^{1/6} + 6 \arctan(x+1)^{1/6}$, | | |
| g) $-x + \tan x + \sec x$, | h) $2 \arcsin \sqrt{x}$, | |
| i) $\frac{1}{2}(1+x)\sqrt{1-2x-x^2} + \arcsin \frac{1+x}{\sqrt{2}}$, | j), k) $-\frac{1}{x+1}\sqrt{x^2+2x+2}$, | |
| l) $-\frac{\sqrt{3}}{3} \arctan(\sqrt{3} \cos x)$. | | |

6.

- | | |
|--|---|
| a) $\frac{1}{2}x x $, | b) $\frac{x^2}{2} \arcsin \frac{1}{2} + \frac{1}{6}(x^2 - 1)^{3/2}$, |
| c) $\frac{4}{3}(1 + \sqrt{x})^{3/2} - \frac{8}{15}(1 + \sqrt{x})^{5/2}$, | d) $\frac{x}{2} \sin(\log x + 1) - \frac{x}{2} \cos(\log x + 1)$, |
| e) $\frac{2}{3}(\sin x)^{3/2} - \frac{2}{7}(\sin x)^{7/2}$, | f) $\frac{2}{3}x^{3/2} \arctan \sqrt{x} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \log(1 + x)$, |
| g) $\log x - 2 \log 1 + \log x - \frac{2}{1 + \log x}$, | h) $\log \left \frac{1 + 2 \sin x}{1 - \sin x} \right $, |
| i) $\frac{x}{2} - \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{4} \log(e^{2x} - 2e^x + 2)$, | j) $\sin x \log(1 + \sin^2 x) - 2 \sin x + 2 \arctan(\sin x)$, |
| l) $-\sqrt{1 - x^2} \log x + \sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{2} \log \left \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{1 - \sqrt{1 - x^2}} \right $, | m) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - x + 4\sqrt{4} - 4 \log(\sqrt{x} + 1)$, |
| n) $\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x$, | o) $\frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 4x$, |
| p) $\frac{5}{2} \log(x^2 + \sqrt{1 + x^4})$, | q) $-\frac{1}{5x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} - \arctan x$, |
| r) $\frac{1+x^2}{2}(\arctan x)^2 - x \arctan x + \frac{1}{2} \log(1 + x^2)$, | s) $\frac{1}{2}(x^2 - 1) \log \left \frac{1-x}{1+x} \right $, |
| t) $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sinh 2x$, | u) $\frac{1}{12} \log \left \frac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4} \right $. |

7. $x \log^2 |x| - 2x \log |x| + 2x + C$, se $x > 0$ onde C é uma constante real arbitrária.
 $x \log^2 |x| - 2x \log |x| + 2x - C$, se $x < 0$
9. $\log(1 + e^{-x}) + \frac{\pi}{2}$.
10. $(1 + x) \log(1 + x) + 1$.