Análise Matemática II

2º exame

Campus da Alameda **5 de Julho de 2006, 13 horas**

Licenciaturas em
Engenharia do Ambiente, Engenharia Biológica, Engenharia Civil, Engenharia Geológica e Mineira, Engenharia de Materiais, Engenharia e Arquitectura Naval, Engenharia do Território, Engenharia Química, Química

---

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(7,0) **I.** 1. Obtenha uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\frac{\cos x}{(5+\operatorname{sen} x)^3}, \qquad x^2 e^x, \qquad \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}},$$

indicando os domínios correspondentes.

2. Considere a função real

$$\varphi(x) = \frac{2x^3 - x - 1}{x^2(x^2+x+1)}.$$

Determine a função ϕ, definida no intervalo $I =]0, +\infty[$, tal que

$$\phi'(x) = \varphi(x), \quad x \in I \text{ e } \phi(1) = \log 3.$$

3. Calcule a área da região delimitada pelos gráficos da função nula e das funções $f(x) = -x$ e $g(x) = \sqrt{2-x}$.

(8,0) **II.** 1. Considere uma função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = x^2 + 2|x||y| + y^2.$$

a) Mostre que g é diferenciável em $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}$ e obtenha uma expressão para o gradiente de g válida para os pontos verificando $x, y > 0$.

b) Calcule ou mostre que não existem $\frac{\partial g}{\partial x}(0,b)$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(a,0)$. O que pode concluir sobre a diferenciabilidade de g sobre os eixos coordenados?

c) Mostre que g é diferenciável em $(0,0)$.

2. Considere aplicações $H :]0,+\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $H(r,t) = (r \operatorname{ch} t, r \operatorname{sh} t)$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

a) Justifique que H é diferenciável e calcule a matriz jacobiana $J_H(r,t)$.

b) Justifique que $f \circ H$ é diferenciável e obtenha a sua derivada em $(2,1)$ em termos de ∇f calculado num ponto conveniente.

(5,0) **III.** 1. Considere $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = e^x(x + y^2 - 1).$$

Determine, se existirem, os pontos de extremo relativo de g.

2. Considere uma função $\phi : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ contínua, positiva e crescente. Defina $\theta : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ por

$$\theta(x) = \int_{x^2/2}^{x} \phi(t)\, dt.$$

a) Obtenha uma expressão para a derivada de θ em termos de ϕ.

b) Mostre que θ é crescente em $[0,1]$.

c) Mostre que $\lim_{x\to+\infty} \theta(x) = -\infty$ e θ possui um ponto de máximo absoluto.