Análise Matemática II

1º exame

Campus da Alameda **21 de Junho de 2006, 13 horas**

Licenciaturas em
Engenharia do Ambiente, Engenharia Biológica, Engenharia Civil, Engenharia e Arquitectura Naval, Engenharia do Território, Engenharia Química, Química

---

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(4,0) **I.** 1. Obtenha uma primitiva de cada uma das seguintes funções, definidas em $\mathbb{R}$ por:

$$\frac{1}{x^2+5}, \qquad \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x + 2}, \qquad \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}.$$

2. Calcule o integral

$$\int_0^1 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}}\, dx.$$

(5,0) **II.** 1. Sejam f e g funções reais, definidas e contínuas num intervalo $[a,b]$, tais que

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b g(t)\, dt\,.$$

Mostre que existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = g(c)$.

2. Calcule o comprimento da linha definida pela equação $y = \frac{1}{3}x^{3/2} - 1$ com $x \in [0,1]$.

3. Seja $\varphi \in C(\mathbb{R})$ uma função ímpar. Sendo

$$\psi(x) = \int_1^{x^2-1} x\,\varphi(t)\, dt\,,$$

calcule $\psi'(x)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e mostre que $\psi'(0) = 0$.

(9,5) **III.** 1. Considere a função $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Mostre que ϕ é uma função contínua (em $\mathbb{R}^2$).

b) Calcule as derivadas parciais (de primeira ordem) de ϕ em cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e mostre que $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ não é contínua em $(0, 0)$.

c) Justifique que ϕ é uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e determine a aplicação $\phi'(-1, 1)$.

d) Sendo $v = (1, -2)$ calcule $\frac{\partial \phi}{\partial v}(-1, 1)$.

2. Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ a função

$$F(t) = (t^2 + 1, \operatorname{ch}(2t))$$

e considere a função $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $G(x, y) = F(\phi(x, y))$, onde ϕ é a função definida em III.1. Justifique que G é diferenciável em $(-1, 1)$ e calcule a sua matriz jacobiana nesse ponto.

3. Considere a função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por

$$h(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy\,.$$

Determine e classifique os pontos de estacionaridade de h.

(1,5) **IV.** Seja Ω um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ tal que, para quaisquer $x, y \in \Omega$, o segmento $S_{x,y} = \{x + \lambda(y - x) : \lambda \in [0, 1]\}$ está contido em Ω. Seja ainda $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $\|\operatorname{grad} f(x)\|$ é uma função majorada em Ω. Prove que existe uma constante positiva M, tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq M\|x - y\| \quad \forall_{x,y \in \Omega}\,.$$