# Cálculo Diferencial e Integral I

**LEIC-A , 2º semestre de 2009/10**

**Exercícios - Ficha 9** **3 de Maio de 2010**

---

1. Calcule as derivadas das funções:

   a) $\operatorname{tg} x - x$,

   b) $\frac{x+\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$,

   c) $e^{\operatorname{arctg} x}$,

   d) $e^{\log^2 x}$,

   e) $\operatorname{sen} x \cdot \cos x \cdot \operatorname{tg} x$,

   f) $x^2(1+\log x)$,

   g) $\cos(\operatorname{arcsen} x)$

   h) $(\log x)^x$,

   i) $x^{\operatorname{sen} 2x}$.

2. Para cada uma das seguintes funções determine o domínio de diferenciabilidade e calcule as respectivas derivadas:

   a) $x|x|$,

   b) $e^{-|x|}$,

   c) $\log|x|$,

   d) $e^{x-|x|}$.

3. Calcule, se existirem, as derivadas laterais no ponto 0 da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

4. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

   a) Justifique que $f$ é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, calcule $f'$ para $x \neq 0$ e mostre que $\lim_{x\to 0} f'(x)$ não existe.

   b) Justifique que $f$ é diferenciável no ponto 0 e calcule $f'(0)$.

5. Sejam $f$ e $g$ duas funções em $\mathbb{R}$ tais que $f$ é diferenciável em $\mathbb{R}$, verifica $f(0) = f(\pi) = 0$, e $g$ é dada por $g(x) = f(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} f(x)$. Obtenha o seguinte resultado:
$$g'(0) + g'(\pi) = f'(0) + f'(\pi).$$

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diferenciável. Calcule $(\operatorname{arctg} f(x) + f(\operatorname{arctg} x))'$.

7. Sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, considere a função $\varphi : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = e^{g(\log x)}$. Supondo conhecidos os valores de $g$, $g'$ e $g''$ em pontos convenientes, determine $\varphi'(1)$ e $\varphi''(e)$.

8. Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^4 e^{-x}$ para todo o $x$, e sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável, calcule $(g \circ f)'(x)$ em termos da função $g'$.

9. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e estritamente monótona, com $g(0) = 2$ e $g'(0) = \frac{1}{2}$. Considere $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = g(\operatorname{arcsen} x)$.

   a) Justifique que $f$ é diferenciável em $]-1, 1[$ e calcule $f'(0)$.

   b) Justifique que $f$ é injectiva e, sendo $f^{-1}$ a sua inversa, calcule $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

10. Considere uma função $f : \mathbb{R} \to ]-1, 1[$ diferenciável e bijectiva, tal que $f(2) = 0$ e $f'(2) = 2$. Seja $g$ a função definida por

$$g(x) = \arccos\left(f(x)\right).$$

   (a) Justifique que $g$ é injectiva e diferenciável e, sendo $g^{-1}$ a função inversa de $g$, determine $g'(2)$ e $(g^{-1})'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

   (b) Determine o domínio de $g^{-1}$ e justifique que $g^{-1}$ não tem máximo nem mínimo. Será $g^{-1}$ limitada?