Cálculo Diferencial e Integral I

LEIC-A , 2º semestre de 2009/10

Exercícios - Ficha 8 **26 de Abril de 2010**

---

1. Use a definição de limite de função em $\tilde{\mathbb{R}}$ para mostrar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

2. Determine, se existir, cada um dos seguintes limites, justificando o cálculo ou a não existência de limite.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x}.$$

3. Calcule

$$\lim_{x\to 0} \left[x^2(1-\cos\tfrac{1}{x})\right], \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x^2-3x+2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{x \arccos x}.$$

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua no ponto 1, dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x \leq -1\,, \\ \operatorname{arcsen} x\,, & \text{se } -1 < x < 1\,, \\ K \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,, & \text{se } x \geq 1\,. \end{cases}$$

   a) Determine K e estude f do ponto de vista da continuidade.
   b) Indique o contradomínio de f e se tem supremo, ínfimo, máximo, mínimo.
   c) Quais são os limites $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to +\infty} f(x)$, caso existam?

5. Considere a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ 1 + e^{1-x} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

   a) Mostre que φ é contínua em qualquer ponto de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   b) Calcule os limites laterais de φ no ponto 0, e indique, justificando, se φ é contínua, contínua à direita ou contínua à esquerda nesse ponto.
   c) Calcule $\lim_{x\to +\infty} \varphi(x)$ e $\lim_{x\to -\infty} \varphi(x)$.
   d) Indique, justificando, o contradomínio de φ.

6. a) Estude, quanto à continuidade em cada ponto do seu domínio, as funções definidas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pelas fórmulas:

$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}\,, \qquad \psi(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\,.$$

   b) Indique, justificando, se cada uma das funções φ e ψ é prolongável por continuidade ou descontínua no ponto 0.

   c) Mostre que φ e ψ são funções limitadas.

7. Considere as funções f e g definidas em $]0, +\infty[$ pelas expressões

$$f(x) = \log \log(1 + x) \qquad , \qquad g(x) = \sqrt{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}.$$

   a) Estude f e g quanto à continuidade.

   b) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

   c) Indique, justificando, se cada uma das funções é prolongável por continuidade ao ponto 0.

   d) Indique, justificando, o contradomínio de f.

8. Sendo $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ contínua no seu domínio, mostre que a função

$$\varphi(x) = g(1 - x^2)$$

   tem máximo e mínimo.

9. Mostre que a equação $\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = 0$ tem pelo menos uma raiz no intervalo $]0, \pi[$.

10. Considere uma função f, contínua em $\mathbb{R}$, e suponha que existem e são finitos os limites $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

   a) Prove que f é limitada.

   b) Supondo que o produto dos dois limites indicados é negativo, indique justificando, o máximo da função

$$g(x) = \frac{1}{1 + [f(x)]^2}.$$