



Cálculo Diferencial e Integral I

LEIC-A , 2º semestre de 2009/10

Exercícios - Ficha 7

19 de Abril de 2010

1. Determine funções inversas das seguintes funções, especificando os respectivos domínios (e contradomínios):
 - a) $f(x) = e^{x^2-2}$, $x > 0$,
 - b) $f(x) = 2 \operatorname{sen} x$, $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,
 - c) $f(x) = \cos(2x)$, $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,
 - d) $f(x) = \operatorname{tg}(x - 1)$, $x \in]1 - \frac{\pi}{2}, 1 + \frac{\pi}{2}[$.
2. Exprima as soluções da equação $\operatorname{sen} x = a$ em termos de $\operatorname{arcsen} a$. Faça o mesmo para a equação $\operatorname{cos} x = a$ em termos de $\operatorname{arccos} a$ e para $\operatorname{tg} x = a$ em termos de $\operatorname{arctg} a$.
3. Deduza as seguintes identidades:
 - a) $\operatorname{cos}(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1 - x^2}$,
 - b) $\operatorname{sen}(\operatorname{arccos} x) = \sqrt{1 - x^2}$,
 - c) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ para $x \neq \pm 1$,
 - d) $\operatorname{tg}(\operatorname{arccos} x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, para $x \neq 0$.
4. Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função injectiva e $g : f(D) \rightarrow D$ a sua inversa (ou seja, $g(y) = x$ sse $y = f(x)$, para quaisquer $x \in D$, $y \in f(D)$). Mostre que
 - a) Se f é crescente/decrescente, então g é crescente/decrescente.
 - b) Se f é ímpar, então g é ímpar.
 - c) arcsen , arctg são crescentes e ímpares, arccos é decrescente.
5. Determine o domínio das funções seguintes:
 - a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$,
 - b) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$,
 - c) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x$,
 - d) $f(x) = \log(\log x)$,
 - e) $f(x) = \log(1 - x^{\frac{3}{2}})$,

- f) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$,
- g) $f(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$,
- h) $f(x) = \operatorname{arcsen}(e^x)$,
- i) $f(x) = \log(1 - \operatorname{arcsen} x)$.
6. Mostre que se (u_n) é uma sucessão monótona, $(\operatorname{arctg} u_n)$ é uma sucessão convergente.
7. Mostre, recorrendo à definição de continuidade, que as funções definidas em \mathbb{R} por $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = |x|$ são contínuas em qualquer $x \in \mathbb{R}$.
8. Sendo $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, mostre que:
- a) Não existe nenhuma sucessão (x_n) de termos em $[0, 1]$ tal que $g(x_n) = n$ para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.
- b) Se existir uma sucessão (x_n) de termos em $[0, 1]$ tal que $g(x_n) = \frac{1}{n}$ para todo o $n \in \mathbb{N}_1$, então existe $c \in [0, 1]$ tal que $g(c) = 0$.
9. Para cada uma das funções definidas pelas expressões seguintes, determine os pontos de continuidade e descontinuidade:
- a) $\frac{x+1}{x^3+x}$;
- b) $\frac{x+1}{x^4+3x^3+2x^2}$;
- c) $\sqrt{x} - \frac{1}{x^2+x}$;
- d) $\operatorname{sen}(\cos \sqrt{1-x^2})$;
- e) $\cos \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
- f) $\sqrt[3]{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{cotg} 2x}$;
- g) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}$;
- h) $\frac{|x^2-1|}{x^2-1}$;
- i) $\sqrt{-\operatorname{sen}^2 x}$.
10. a) Mostre que se uma função é contínua em \mathbb{R} e nula em todos o racionais, então a função é identicamente nula (ou seja, $f(x) = 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$).
- b) Se f e g estão definidas em \mathbb{R} e coincidem nos racionais, têm que coincidir em \mathbb{R} ? E se, por hipótese, ambas são contínuas?