



Cálculo Diferencial e Integral I

LEIC-A , 2º semestre de 2009/10

Exercícios - Ficha 6

12 de Abril de 2010

1. Mostre que as seguintes séries são convergentes e calcule as somas:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \quad e \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}).$$

2. Estude quanto à convergência as séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{1+n!} \quad e \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+|x|}\right)^n.$$

3. Determine a natureza das séries cujos termos de ordem n são:

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{n^3+4} & \frac{n}{\sqrt{n^4+n^2+1}} & \frac{n \cdot 2^n}{e^n} & \frac{n!}{n^2+2^n} \\ \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} & \frac{(n!)^2}{(2n)!} & \frac{2^n}{1+3^n} & \frac{n^{1000}}{(1,001)^n} \\ \frac{n!}{e^n} & \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt[3]{n+1} \sqrt[4]{n+2}} & \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3n+3)} & \frac{[(2n)!]^2}{n!(3n)!} \end{array}$$

4. Sendo a_n o termo geral de uma sucessão de termos positivos, indique, justificando, a natureza das séries:

$$\sum (1 + a_n) \quad , \quad \sum \frac{1}{n^2 + a_n} \quad e \quad \sum \frac{a_n}{1 + a_n}.$$

5. Indique, justificando, se são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes as séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2 + 1} \quad , \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2 + a^2}\right)^n \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Calcule a soma das que forem convergentes.

6. Determine a natureza das séries

$$\sum \frac{\log n}{n} \quad , \quad \sum (-1)^n \frac{n}{n^2 + 1} \quad e \quad \sum \frac{n^3}{e^n}.$$

No caso de convergência, indique se é simples ou absoluta.

7. Prove que são necessariamente verdadeiras ou mostre, por meio de exemplos, que podem ser falsas, as afirmações correspondentes às alíneas a), b) e c) seguintes. Sendo $\sum a_n$ uma série convergente de termos positivos, a série

$$a) \sum (-1)^n a_n \quad , \quad b) \sum \sqrt[n]{a_n} \quad , \quad c) \sum a_{2n+1}$$

é necessariamente convergente.

8. Determine o raio de convergência da série de potências:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{n+1}$$

e indique, justificando, os valores reais de x para os quais a série é absolutamente convergente e aqueles para que é simplesmente convergente.

9. Determine o conjunto dos pontos em que é absolutamente convergente e o conjunto dos pontos em que é simplesmente convergente a série:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} \left(\frac{x-2}{x}\right)^n.$$

10. Sendo k um número natural, determine o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{n(n+k)}$$

e calcule a soma da série no extremo superior do seu intervalo de convergência.