Cálculo Diferencial e Integral I

LEIC-A , 2º semestre de 2009/10

Exercícios - Ficha 4 22 de Março de 2010

---

1. Indique quais são majoradas, minoradas, limitadas, de entre as sucessões definidas do modo seguinte:

   a) $u_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$

   b) $u_n = (-1)^n n^2$

   c) $u_n = n^{(-1)^n}$

   d) $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$

   e) $u_1 = -1,\ u_{n+1} = -2u_n$

   f) $u_1 = 0,\ u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{3}$

2. Para as sucessões consideradas no exercício anterior, indique se são monótonas (crescentes ou decrescentes).

3. Baseando-se directamente na definição de limite mostre que:

   a) $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$

   b) $\frac{n^2}{n^2+1} \to 1$

   c) A sucessão de termo geral $u_n = n^2$ é divergente.

4. Calcule o limite (em $\mathbb{R}$) ou justifique a sua não existência para cada uma das sucessões de termo geral

   a) $\frac{(2n+1)^3+n}{n^3+1}$

   b) $\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n-1}}$

   c) $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[4]{4n^2+1}}$

   d) $\frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n}}$

   e) $\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

   f) $\frac{\sqrt[n]{1000}+1000}{n}$

   g) $\frac{n^n}{n^n+1}$

   h) $\frac{\sqrt[n]{3}}{\sqrt[3]{n}}$

5. Indique justificando abreviadamente a resposta, o conjunto dos valores reais de a para os quais a sucessão de termo geral $x_n = \frac{a^n}{2^{1+2n}}$ é

   a) convergente;

   b) divergente, mas limitada.

6. Dê exemplos de sucessões tais que:

   a) (u_n) tem termos em $]-\infty, 1[$ e é crescente;

   b) (u_n) não é monótona e é convergente;

   c) (u_n) é divergente e $(|u_n|)$ é convergente;

   d) (u_n) é limitada e divergente;

   e) (u_n) tem termos em $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_1\}$ e é divergente;

   f) (u_n) tem termos em $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ e converge para um elemento de $\mathbb{Q}$.

7. Considere a sucessão real (u_n) dada por:

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{2} \end{cases}.$$

   a) Mostre usando indução que $u_n \leq 2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$.

   b) Mostre que (u_n) é uma sucessão crescente.

   c) Mostre que (u_n) é convergente e indique $\lim u_n$.

8. Seja $u_1 > 1$ e $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$ para $n \in \mathbb{N}_1$. Mostre que u_n é convergente (sugestão: começe por provar por indução matemática que $1 < u_n < 2$, para todo o inteiro $n \geq 2$). Calcule $\lim u_n$.

9. Seja (u_n) a sucessão definida por recorrência por $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

   a) Prove por indução que $1 \leq u_n < 2$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

   b) Prove por indução que (u_n) é crescente.

   c) Justifique que (u_n) é convergente.

   d) Aplicando limites a ambos os membros da expressão de recorrência, determine o limite de (u_n).

10. Justifique que, se as condições

$$u_n > 0 \quad \text{e} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

são verificadas qualquer que seja $n \in \mathbb{N}_1$, então u_n é convergente.