Cálculo Diferencial e Integral I

LEIC-A , 2º semestre de 2009/10

Exercícios - Ficha 3   15 de Março de 2010

---

1. Demonstre pelo princípio de indução matemática que:

   a) $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}_1$

   b) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, para todo o natural $n \geq 1$

   c) $(n!)^2 > 2^n n^2$, para todo o natural $n \geq 4$

   d) $n! \geq 2^{n-1}$, para todo o natural $n \geq 1$

2. Demonstre pelo princípio de indução matemática que:

   a) Para $a \in \mathbb{R}$, $(a-1)(1 + a + \cdots + a^n) = a^{n+1} - 1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$

   b) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$

   c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$

   d) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$

3. Demonstre pelo princípio de indução matemática que:

   a) $(n+2)! \geq 2^{2n}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$

   b) $2n - 3 < 2^{n-2}$, para todo o natural $n \geq 5$

   c) $7^n - 1$ é múltiplo de 6 para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$

   d) $2^{2n} + 2$ é múltiplo de 3 para qualquer $n \in \mathbb{N}$

4. Demonstre a desigualdade de Bernoulli: Sendo $a > -1$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$(1+a)^n \geq 1 + na.$$

5. Seja $P(n)$ a condição "$n^2 + 3n + 1$ é par".

   a) Mostre que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

   b) Pode concluir que $n^2 + 3n + 1$ é par, para qualquer $n \in \mathbb{N}$?

   c) Mostre que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 3n + 1$ é ímpar

6. Seja $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $f(0) = 1$ e $f(n+1) = (2n+2)(2n+1)f(n)$. Mostre por indução matemática que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = (2n)!$$

7. Considere a sucessão real (u_n) dada por:

$$\begin{cases} u_1 = 3, \\ u_{n+1} = \frac{3u_n}{(n+1)^2}. \end{cases}$$

Mostre usando indução matemática que $u_n = \frac{3^n}{(n!)^2}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$.

8. Considere a sucessão real (u_n) dada por:

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n^2 + 1}. \end{cases}$$

Mostre usando indução matemática que $u_n = \sqrt{2^n - 1}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$.

9. Verifique que se x, y são números racionais, então $x + y$, xy, $-x$, x^{-1} (para $x \neq 0$) são também números racionais.

   Observação: Quer dizer, $\mathbb{Q}$ é fechado para a adição e multiplicação e contem os simétricos e inversos de todos os seus elementos. Mostra-se assim, uma vez que também os elementos neutros 0 e 1 são racionais, que $\mathbb{Q}$ é um corpo. É fácil ver que também verifica as propriedades de ordem, ou seja, $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado.

10. Verifique que, se x é um número racional diferente de zero e y um números irracional, $x + y$, $x - y$, xy e y/x são irracionais; mostre também que, sendo x e y irracionais, a sua soma, diferença, produto e quociente podem ser ou não ser irracionais.