Cálculo Diferencial e Integral I

LEIC-A , 2º semestre de 2009/10

Exercícios - Ficha 2 **8 de Março de 2010**

---

1. Indique justificando quais das proposições seguintes são verdadeiras:

   a) $\{1\} \subset \{1, \{2, 3\}\}$
   b) $\{1\} \in \{1, \{2, 3\}\}$
   c) $2 \in \{1, \{2, 3\}\}$
   d) $1 \in \{\mathbb{R}\}$
   e) $\emptyset = \{x \in \mathbb{N} : x = x + 1\}$
   f) $\emptyset \in \{0\}$
   g) $\emptyset \subset \{0\}$
   h) $\forall_{x \in \mathbb{R}}\, x > 0 \Leftrightarrow x^{-1} > 0$
   i) $\forall_{x \in \mathbb{R}}\, x > 1 \Leftrightarrow x^{-1} < 1$
   j) $\forall_{x,y \in \mathbb{R}}\, x < y \Rightarrow y^{-1} < x^{-1}$
   k) $\forall_{x \neq 0}\, x^2 > 0$
   l) $\forall_{x,y \in \mathbb{R}}\, x < y \Rightarrow x^2 < y^2$
   m) $\forall_{x,y \in \mathbb{R}}\, x < y < 0 \Rightarrow x^2 > y^2$

2. Verifique que $\forall_{a>0}\, a + \frac{1}{a} \geq 1$. (Sugestão: considere separadamente $a \geq 1$ e $a < 1$.)

3. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq \frac{x}{2} + 2\right\}, \qquad B = [-3, 4], \qquad C = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$
   a) Mostre que $A \cap B = [-3, -\frac{4}{3}] \cup \{4\}$.
   b) Indique, se existirem em $\mathbb{R}$, $\sup A$, $\min(A \cap B)$, $\max(A \cap B)$, $\inf(A \cap B \cap C)$, $\sup(A \cap B \cap C)$ e $\min(A \cap B \cap C)$.

4. Considere os conjuntos A e B definidos por
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, \frac{x-1}{x \log x} > 0\right\}, B = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, x = -\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_1\right\}.$$
   Mostre que o conjunto A é igual a $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Determine, caso existam, ou justifique que não existem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo dos conjuntos A e $A \cup B$.

5. Considere os seguintes conjuntos de números reais:

$$A = \left\{ x \,:\, \frac{x^2-1}{x} \geq |x-1| \right\}, \qquad B = \{x \,:\, \operatorname{sen} x = 0\}, \qquad C = \mathbb{Q}.$$

   a) Mostre que $A = \left[-\frac{1}{2},\, 0\right[\cup [1,\, +\infty[$.
   b) Escreva os conjuntos dos majorantes e minorantes de $A \cap C$ e $B \cap C$. Calcule ou conclua da não existência de $\sup A$, $\inf A \cap C$, $\min A \cap C$, $\min B$, $\sup B \cap C$.

6. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x : \frac{x^2-2}{|x|-1} \leq 0 \right\}, \quad B = \{2^{n/2} : n \in \mathbb{N}_1\}.$$

   a) Mostre que $A = \left[-\sqrt{2}, -1\right[\,\cup\, \left]1, \sqrt{2}\right]$.
   b) Determine ou justifique que não existem, os supremo, máximo, ínfimo e mínimo de cada um dos conjuntos $A \cap \mathbb{Q}$, B e $B \cap \mathbb{Q}$.

7. Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$, majorado e não vazio, e seja m um majorante de A, distinto do supremo desse conjunto. Mostre que existe $\epsilon > 0$ tal que $V_\epsilon(m) \cap A = \emptyset$.

8. Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$ tais que $A \subset B$ e suponha que A é não vazio e B é majorado. Justifique que existem os supremos de A e B e prove que se verifica $\sup A \leq \sup B$.

9. Sendo U e V dois subconjuntos majorados e não vazios de $\mathbb{R}$, tais que $\sup U < \sup V$, justifique (de forma precisa e abreviada) as afirmações seguintes:

   a) Se $x \in U$, então $x < \sup V$.
   b) Existe pelo menos um $y \in V$ tal que $y > \sup U$.

10. Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$.

   a) Prove que, se $\sup A < \inf B$, A e B são disjuntos.
   b) Mostre, por meio de exemplos, que se for $\sup A > \inf B \wedge \sup B > \inf A$, A e B podem ser ou não disjuntos.

Mais exercícios: Ver:

[1] J. Campos Ferreira. Introdução à Análise Matemática, Fundação Calouste Gulbenkian, 8ª ed., 2005.
[2] Exercícios de Análise Matemática I e II, IST Press, 2003.