Cálculo Diferencial e Integral I

LEIC-A , 2º semestre de 2009/10

Exercícios - Ficha 13 31 de Maio de 2010

---

1. Calcule

$$a) \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \qquad b) \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx \qquad c) \int_{\frac{1}{2}}^{1} \log x\,dx \qquad d) \int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x}\,dx$$

2. Determine as derivadas das funções seguintes:

$$a) \int_1^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt, \qquad b) \int_x^{2\pi} \cos(t^2)\,dt,$$

$$c) \int_x^{2x} e^{t^2}\,dt, \qquad d) \int_x^{x^2} e^{-t^2}\,dt, \qquad e) \int_{x^2}^{x^4} \operatorname{sen}(\sqrt{t})\,dt.$$

3. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções integráveis em qualquer intervalo limitado e com a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned} &\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 2\int_0^x f(t)\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ &\int_{-x}^{x} g(t)\,dt = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1}$$

   a) Mostre que se f é par e g é ímpar então verificam (1).

   b) Mostre que se f e g são contínuas e verificam (1) então f é par e g é ímpar.

   c) Forneça exemplos de funções f e g que verificam (1) e que não sejam par nem ímpar, respectivamente.

4. Calcule

$$a) \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 u\,du, \qquad b) \int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\operatorname{sen}^4 x}\,dx,$$

$$c) \int_0^1 \log(1+\sqrt{x})\,dx, \qquad d) \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} \arctan x\,dx.$$

5. Calcule os limites:

$$a) \lim_{x\to+\infty} x \int_{\pi/2}^{\arctan x} \operatorname{sen}(t^2)\,dt, \qquad b) \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} te^{\sqrt{t}}\,dt}{\int_0^{x^3} (e^{\sqrt[3]{t}}-1)\,dt}.$$

6. Relembre que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se periódica de período $T > 0$, sse $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x+T)$. Mostre que, se f é contínua e periódica de período $T > 0$, então

$$F(x) = \int_x^{x+T} f(t)\, dt$$

é uma função constante em $\mathbb{R}$.

7. Mostre que, para qualquer $x > 0$,

$$\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int_{1/x}^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt.$$

(**Sugestão:** use uma substituição de variável adequada.)

8. Determine o domínio, intervalos de monotonia e extremos locais das funções:

   a) $f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}\, dt$,

   b) $g(x) = \int_2^{e^x} \frac{1}{\log t}\, dt$.

9. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-e^x}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

   a) Justifique integrabilidade da função f, em qualquer intervalo limitado de $\mathbb{R}$,

   b) Definindo $\Psi(x) = \int_0^x f(s)\, ds$, justifique que se trata de uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, e calcule $\Psi'(x), x \in \mathbb{R}$.

10. Seja $a > 1$ e A o conjunto de pontos $P(x, y)$ cujas coordenadas verificam as condições:

$$0 \leq y \leq \log x \qquad \text{e} \qquad x \leq a.$$

   a) Calcule a área de A;

   b) Calcule o comprimento da linha que "limita"o conjunto A (formada por um arco de curva e dois segmentos de recta).