



Cálculo Diferencial e Integral I

LEIC-A , 2º semestre de 2009/10

Exercícios - Ficha 11 17 de Maio de 2010

1. Prove que, se a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ verifica a condição

$$f^{(n)}(x) = 0 \quad \text{para qualquer } x \in \mathbb{R},$$

então f é um polinómio de grau menor que n .

2. De que ordem é o contacto das funções definidas por

$$f(x) = e^x \quad \text{e} \quad g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

no ponto 0 ?

3. a) Determine o raio de convergência da série de potências

$$\sum \frac{(x-1)^n}{3^n \sqrt{n}}$$

e indique, justificando, em que dos pontos a série converge absolutamente e em que pontos converge simplesmente.

- b) Supondo que a função g é definida pela igualdade

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n \sqrt{n}}$$

no conjunto de todos os pontos em que a série é convergente, calcule $g(1)$ e $g''(1)$ e escreva a série de Taylor, no ponto 1, da função $x + g'(x)$.

4. Desenvolva em série de Mac-Laurin a função

$$\varphi(x) = x \log(1 + x^3)$$

e aproveite o desenvolvimento para justificar que a função tem um mínimo no ponto 0.

Sugestão: Pode ser útil usar a fórmula conhecida

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

Mostre que $\varphi'(0) = \varphi''(0) = \varphi'''(0) = 0$ e observe o sinal de $\varphi^{(4)}$.

5. Calcule uma primitiva de cada uma das funções:

| | | |
|--|--|---|
| a) $\sqrt{2x} + \sqrt{\frac{x}{2}}$, | b) $3 \operatorname{sen} x + 2x^2$, | c) $\frac{x^2}{1+x^3}$, |
| d) xe^{-x^2} , | e) $\frac{3 \operatorname{sen} x}{(1+\cos x)^2}$, | f) $x\sqrt{1+x^2}$, |
| g) $e^{2 \operatorname{sen} x} \cos x$, | h) $\frac{1}{1+e^x}$, | i) $\operatorname{tg} x$, |
| j) $\frac{1}{2+x^2}$, | l) $\operatorname{tg}^2 x$, | m) $\cos^3 x \operatorname{sen}^3 x$, |
| n) $\frac{1}{(1+x^2) \arctan x}$, | o) $\frac{x}{1+x^4}$, | p) $\frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}$, |
| q) $\frac{1}{1+3x^2}$, | r) $\frac{e^x}{e^{2x}+4}$, | s) $\sqrt{\frac{\operatorname{arcsen} x}{1-x^2}}$, |
| t) $\frac{x}{\sqrt{1-2x^4}}$, | u) $\frac{1}{(x+1)(x-2)}$, | v) $\frac{1}{(x+1)^2}$. |

6. Calcule uma primitiva de cada uma das funções:

| | | |
|------------------------------------|--------------------------|-----------------------------------|
| a) $\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}$, | b) $\frac{x^5}{x^2-1}$, | c) $\frac{x}{(x+1)(x+2)^2}$, |
| d) $\frac{x^3+2x^2+2x}{(x+1)^2}$, | e) $\frac{x^4}{x^4-1}$, | f) $\frac{x^3+4x^2-4x}{x^4-16}$. |

7. Determine *todas* as primitivas de cada uma das funções do exercício anterior (nos respectivos domínios).

8. Determine a função $\psi :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as condições

$$\psi''(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{para } x > -1,$$

$$\psi(0) = \psi'(0) = 1.$$