



Cálculo Diferencial e Integral I

LEIC-A , 2º semestre de 2009/10

Exercícios - Ficha 10 10 de Maio de 2010

1. Prove que se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é duas vezes diferenciável e o seu gráfico cruza a recta $y = x$ em três pontos, então f'' tem pelo menos um zero.
2. Prove que a equação $3x^2 - e^x = 0$ tem exactamente três zeros.
3. Seja f uma função diferenciável em \mathbb{R} tal que $f(0) = 0$ e cuja derivada é uma função crescente. Mostre que a função definida por $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ é crescente em \mathbb{R}^+ . (Sugestão: Aplique o Teorema de Lagrange a f num intervalo adequado para mostrar que $g'(x) \geq 0$.)
4. Determine intervalos de monotonia, extremos locais e extremos absolutos (se existentes) para as funções:
 - a) $\frac{x}{x^2+1}$,
 - b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$,
 - c) $|x^2 - 5x + 6|$,
 - d) $x \log x$,
 - e) e^{-x^2} ,
 - f) $\frac{e^x}{x}$,
 - g) xe^{-x} ,
 - h) $\arctg x - \log \sqrt{1+x^2}$.
5. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|e^{-\frac{x^2}{2}}$.
 - a) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - b) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule f' .
 - c) Determine os intervalos de monotonia e, se existirem, pontos de extremo, classificando-os quanto a serem máximos, mínimos, relativos ou absolutos.
 - d) Determine, justificando, o contradomínio de f .

6. Considere a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} e^x + \alpha x + \beta & \text{se } x \leq 0 \\ \operatorname{arctg}(e^x + e^{-x} - 1) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

onde α e β são constantes reais.

- Determine α e β sabendo que g tem derivada finita em $x = 0$. (Se não conseguir responder a esta pergunta, use $\alpha = -1$ e $\beta = 4$ nas alíneas seguintes.)
- Determine $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- Estude g quanto à diferenciabilidade e calcule g' nos pontos onde existir.
- Estude g quanto à existência de extremos e intervalos de monotonia.
- Determine o contradomínio de g .

7. Calcule os limites:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x+e^x)}{x}$,
- $\lim_{x \rightarrow 1} (\log x \cdot \log \log x)$,
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}$,
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-1/x}}{x}$,
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^{\log \log x}$,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x-1}}$,
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}$.

8. Calcule os limites

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log x)^{\frac{1}{x}}$,
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$,
- $\lim \left(\frac{1}{n}\right)^{\operatorname{sen} \frac{1}{n}}$ (Sugestão: determine primeiro $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\operatorname{sen} x}$).