



# Cálculo Diferencial e Integral I

LEIC-A , 2º semestre de 2009/10

2º Exame 7 de Julho de 2010

Resolva, ainda que parcialmente, os problemas propostos em 5 dos 7 grupos. Duração: 3 horas

I. 1. Considere os seguintes conjuntos de números reais:

$$A = \left\{ x : \frac{x^2 - 1}{x} \leq x - 1 \right\}, \quad B = \{x : \sin x = 0\}, \quad C = \mathbb{Q}.$$

a) Mostre que  $A = ]0, 1]$ ,  $B \cap C = \{0\}$ .

b) Escreva os conjuntos dos majorantes e minorantes de  $A \cap C$  e  $B \cap C$ . Calcule ou conclua a não existência de  $\sup A$ ,  $\inf A \cap C$ ,  $\min A \cap C$ ,  $\min B$ ,  $\sup B \cap C$ ,  $\max B \cap C$ .

2. Demonstre pelo princípio de indução matemática que

$$2^n \leq (n + 1)! \quad \text{para } n \in \mathbb{N}_1.$$

II. 1. Calcule, justificando, o limite em  $\tilde{\mathbb{R}}$  para cada uma das sucessões de termo geral

$$a) \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}, \quad b) \frac{n^2 + e^{n+1}}{e^n + n^{1/n}}, \quad c) \left(1 - \frac{1}{n^3}\right)^n.$$

2. Mostre que se  $(u_n)$  é uma sucessão limitada, então a sucessão  $(a_n)$  de termo geral  $a_n = \max\{u_1^2, u_2^2, \dots, u_n^2\}$  é uma sucessão convergente.

III. 1. Indique, justificando, a natureza das séries:

$$a) \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad b) \sum \frac{n!}{2^n \cdot n^2}, \quad c) \sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

2. Determine o conjunto  $D \subset \mathbb{R}$  dos valores  $x$  para os quais a série converge e determine a soma:

$$s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}(x+1)^n, \quad x \in D.$$

IV. 1. Determine o domínio e contradomínio da seguinte função, mostre que é monótona e calcule a sua inversa:

$$y(x) = 1 - \arctg \sqrt{x}.$$

2. Mostre que a função

$$f(x) = \log(x^3 - e + 1), \quad x \geq \sqrt[3]{e}$$

é injectiva, indique o contradomínio  $C_f$  de  $f$  e calcule a função inversa  $\varphi = f^{-1} : C_f \rightarrow \mathbb{R}$ .

- V.** 1. Determine intervalos de monotonia, extremos locais e extremos absolutos (se existentes) para a função:

$$F(x) = xe^{-x}.$$

2. Calcule os limites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{\operatorname{tg} x - x}, \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\log x)^{\frac{1}{x}}.$$

- VI.** Determine, utilizando métodos de primitivação adequados, todas as primitivas de cada uma das seguintes funções:

$$a) \frac{x^3}{1+x^4}, \quad b) x^3 e^{x^2}, \quad c) \frac{4e^x}{e^{2x}-1}.$$

- VII.** 1. Calcule o valor do integral

$$a) \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos^2 x \, dx, \quad b) \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \cos^2 x \, dx.$$

2. Determine as derivadas das funções seguintes indicando os domínios:

$$a) \int_0^x \cos^2 t \, dt, \quad b) \int_{x^4}^{x^2} \sqrt{t} \, dt.$$