Cálculo Diferencial e Integral I

LEIC-A , 2º semestre de 2009/10

1º Exame 21 de Junho de 2010

Resolva, ainda que parcialmente, os problemas propostos em 5 dos 7 grupos. Duração: 3 horas

---

I. 1. Escreva o seguinte conjunto como reunião de três intervalos:

$$C = \{x \in \mathbb{R} : \left|x^2 - 1\right| > |x+1|\}.$$

2. Demonstre pelo princípio de indução matemática que $x_n = 2^{2n} - 1$ é múltiplo de 3 para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$.

3. Dê um exemplo de uma sucessão real que tem conjunto de termos infinito e os dois sublimites 2 e 8 .

II. 1. Calcule, justificando, o limite em $\widetilde{\mathbb{R}}$ para cada uma das sucessões de termo geral

$$a)\ \frac{3n^2 - 100n}{3n + 100n^2}\ ,\ b)\ (1 + \frac{1}{n^3})^{n^4/2}\ ,\ c)\ (\frac{1}{n!})^{-1/n}\ .$$

2. Considere uma sucessão real (u_n) com as seguintes propriedades:

$$0 < u_1 < u_2\ ,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1})\ \texttt{para}\ n \geq 2.$$

Justifique que a sucessão converge considerando separadamente as subsucessões de termos com índice par e impar, respectivamente.

III. 1. Mostre que as seguintes séries são convergentes em $\widetilde{\mathbb{R}}$ e calcule as somas:

$$a)\ \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{1}{1+e^x})^n\ (x \in \mathbb{R})\ ,\ b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \log \frac{n+1}{n}\ .$$

2. Determine o raio de convergência da série de potências:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+2)^n}{n\cos(n\pi)}$$

e indique, justificando, os valores reais de x para os quais a série é absolutamente convergente e aqueles para que é simplesmente convergente.

IV. 1. Determine o domínio das funções seguintes:

$$a)\ \frac{x+1}{x^4 + 3x^3 + 2x^2}\ ,\ b)\ \cos\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ,\ c)\ \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}\ .$$

2. Mostre que a função

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x^3 - 1)\quad ,\quad x \in \mathbb{R}$$

é injectiva, indique o contradomínio C_f de f e calcule a função inversa $\varphi = f^{-1} : C_f \to \mathbb{R}$.

V. 1. Considere a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$h(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

a) Justifique que h é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, calcule $h'(x)$ para $x \neq 0$ e mostre que $\lim_{x\to 0} h'(x)$ não existe.

b) Justifique que h é diferenciável no ponto 0 e calcule $h'(0)$.

2. Determine intervalos de monotonia, extremos locais e extremos absolutos (se existentes) para a função:

$$\psi(x) = \begin{cases} x^2 \log x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

VI. Determine, utilizando métodos de primitivação adequados, uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$a)\ x^2 e^{x^3} \quad , \quad b)\ e^x \cos x \quad , \quad c)\ \frac{2x^2+5x}{(x+1)^2(x-2)}.$$

VII. 1. Calcule os valores dos integrais

$$a)\ \int_0^{3\pi} \operatorname{sen} x \cos x \, dx \quad , \quad b)\ \int_{6\pi}^{9\pi} \operatorname{sen} x \cos x \, dx.$$

2. Determine as derivadas das funções seguintes indicando os domínios:

$$a)\ \int_1^x \log t \, dt \quad , \quad b)\ \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x+1}} e^{-t^2} \, dt \ .$$