



# Cálculo Diferencial e Integral I

LEIC-A , 2º semestre de 2008/09

Exercícios - Ficha 9      4 de Maio de 2009

---

1. Calcule as derivadas das funções:

- a)  $\operatorname{tg} x - x$ ,
- b)  $\frac{x + \cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$ ,
- c)  $e^{\operatorname{arctg} x}$ ,
- d)  $e^{\log^2 x}$ ,
- e)  $\operatorname{sen} x \cdot \cos x \cdot \operatorname{tg} x$ ,
- f)  $x^2(1 + \log x)$ ,
- g)  $\cos(\operatorname{arcsen} x)$
- h)  $(\log x)^x$ ,
- i)  $x^{\operatorname{sen} 2x}$ .

2. Para cada uma das seguintes funções determine o domínio de diferenciabilidade e calcule as respectivas derivadas:

- a)  $x|x|$ ,
- b)  $e^{-|x|}$ ,
- c)  $\log|x|$ ,
- d)  $e^{x-|x|}$ .

3. Calcule, se existirem, as derivadas laterais no ponto 0 da função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 + e^{1/x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

4. Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

a) Justifique que  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , calcule  $f'$  para  $x \neq 0$  e mostre que  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$  não existe.

b) Justifique que  $f$  é diferenciável no ponto 0 e calcule  $f'(0)$ .

5. Sejam  $f$  e  $g$  duas funções em  $\mathbb{R}$  tais que  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$ , verifica  $f(0) = f(\pi) = 0$ , e  $g$  é dada por  $g(x) = f(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} f(x)$ . Obtenha o seguinte resultado:

$$g'(0) + g'(\pi) = f'(0) + f'(\pi).$$

6. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , diferenciável. Calcule  $(\operatorname{arctg} f(x) + f(\operatorname{arctg} x))'$ .

7. Sendo  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função duas vezes diferenciável, considere a função  $\varphi : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\varphi(x) = e^{g(\log x)}$ . Supondo conhecidos os valores de  $g$ ,  $g'$  e  $g''$  em pontos convenientes, determine  $\varphi'(1)$  e  $\varphi''(e)$ .

8. Sendo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = x^4 e^{-x}$  para todo o  $x$ , e sendo  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável, calcule  $(g \circ f)'(x)$  em termos da função  $g'$ .

9. Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável e estritamente monótona, com  $g(0) = 2$  e  $g'(0) = \frac{1}{2}$ . Considere  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = g(\operatorname{arcsen} x)$ .

a) Justifique que  $f$  é diferenciável em  $] - 1, 1[$  e calcule  $f'(0)$ .

b) Justifique que  $f$  é injectiva e, sendo  $f^{-1}$  a sua inversa, calcule  $(f^{-1})'(2)$ .

10. Considere uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow ] - 1, 1[$  diferenciável e bijectiva, tal que  $f(2) = 0$  e  $f'(2) = 2$ . Seja  $g$  a função definida por

$$g(x) = \operatorname{arcos}(f(x)).$$

(a) Justifique que  $g$  é injectiva e diferenciável e, sendo  $g^{-1}$  a função inversa de  $g$ , determine  $g'(2)$  e  $(g^{-1})'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .

(b) Determine o domínio de  $g^{-1}$  e justifique que  $g^{-1}$  não tem máximo nem mínimo. Será  $g^{-1}$  limitada?