



Cálculo Diferencial e Integral I

LEIC-A , 2º semestre de 2008/09

Exercícios - Ficha 8

27 de Abril de 2009

1. Use a definição de limite de função em $\tilde{\mathbb{R}}$ para mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

2. Determine, se existir, cada um dos seguintes limites, justificando o cálculo ou a não existência de limite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x}.$$

3. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x} \right) \right], \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{x \operatorname{arccos} x}.$$

4. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, contínua no ponto 1, dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq -1, \\ \operatorname{arcsen} x, & \text{se } -1 < x < 1, \\ K \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} x \right), & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

- Determine K e estude f do ponto de vista da continuidade.
- Indique o contradomínio de f e se tem supremo, ínfimo, máximo, mínimo.
- Quais são os limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, caso existam?

5. Considere a função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ 1 + e^{1-x} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

- Mostre que φ é contínua em qualquer ponto de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Calcule os limites laterais de φ no ponto 0, e indique, justificando, se φ é contínua, contínua à direita ou contínua à esquerda nesse ponto.
- Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$.
- Indique, justificando, o contradomínio de φ .

6. a) Estude, quanto à continuidade em cada ponto do seu domínio, as funções definidas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pelas fórmulas:

$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad \psi(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

- b) Indique, justificando, se cada uma das funções φ e ψ é prolongável por continuidade ou descontínua no ponto 0.
c) Mostre que φ e ψ são funções limitadas.
7. Considere as funções f e g definidas em $]0, +\infty[$ pelas expressões

$$f(x) = \log \log(1 + x) \quad , \quad g(x) = \sqrt{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}.$$

- a) Estude f e g quanto à continuidade.
b) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
c) Indique, justificando, se cada uma das funções é prolongável por continuidade ao ponto 0.
d) Indique, justificando, o contradomínio de f .
8. Sendo $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ contínua no seu domínio, mostre que a função

$$\varphi(x) = g(1 - x^2)$$

tem máximo e mínimo.

9. Mostre que a equação $\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = 0$ tem pelo menos uma raiz no intervalo $]0, \pi[$.
10. Considere uma função f , contínua em \mathbb{R} , e suponha que existem e são finitos os limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- a) Prove que f é limitada.
b) Supondo que o produto dos dois limites indicados é negativo, indique justificando, o máximo da função

$$g(x) = \frac{1}{1 + [f(x)]^2}.$$