Cálculo Diferencial e Integral I

LEIC-A , 2º semestre de 2008/09

Exercícios - Ficha 7 20 de Abril de 2009

---

1. Determine funções inversas das seguintes funções, especificando os respectivos domínios (e contradomínios):

   a) $f(x) = e^{x^2-2}$, $x > 0$,

   b) $f(x) = 2\,\mathrm{sen}\,x$, $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

   c) $f(x) = \cos(2x)$, $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

   d) $f(x) = \mathrm{tg}(x-1)$, $x \in]1-\frac{\pi}{2}, 1+\frac{\pi}{2}[$.

2. Exprima as soluções da equação $\mathrm{sen}\,x = a$ em termos de $\mathrm{arcsen}\,a$. Faça o mesmo para a equação $\cos x = a$ em termos de $\arccos a$ e para $\mathrm{tg}\,x = a$ em termos de $\mathrm{arctg}\,a$.

3. Deduza as seguintes identidades:

   a) $\cos(\mathrm{arcsen}\,x) = \sqrt{1-x^2}$,

   b) $\mathrm{sen}(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$,

   c) $\mathrm{tg}(\mathrm{arcsen}\,x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ para $x \neq \pm 1$,

   d) $\mathrm{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, para $x \neq 0$.

4. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função injectiva e $g : f(D) \to D$ a sua inversa (ou seja, $g(y) = x$ sse $y = f(x)$, para quaisquer $x \in D$, $y \in f(D)$). Mostre que

   a) Se f é crescente/decrescente, então g é crescente/decrescente.

   b) Se f é ímpar, então g é ímpar.

   c) arcsen, arctg são crescentes e ímpares, arcos é decrescente.

5. Determine o domínio das funções seguintes:

   a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$,

   b) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\mathrm{sen}^2\,x}$,

   c) $f(x) = \mathrm{tg}\,x + \mathrm{cotg}\,x$,

   d) $f(x) = \log(\log x)$,

   e) $f(x) = \log(1 - x^{\frac{3}{2}})$,

f) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$,

g) $f(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$,

h) $f(x) = \operatorname{arcsen}(e^x)$,

i) $f(x) = \log(1 - \operatorname{arcsen} x)$.

6. Mostre que se (u_n) é uma sucessão monótona, $(\operatorname{arctg} u_n)$ é uma sucessão convergente.

7. Mostre, recorrendo à definição de continuidade, que as funções definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = |x|$ são contínuas em qualquer $x \in \mathbb{R}$.

8. Sendo $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, mostre que:

   a) Não existe nenhuma sucessão (x_n) de termos em $[0, 1]$ tal que $g(x_n) = n$ para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

   b) Se existir uma sucessão (x_n) de termos em $[0, 1]$ tal que $g(x_n) = \frac{1}{n}$ para todo o $n \in \mathbb{N}_1$, então existe $c \in [0, 1]$ tal que $g(c) = 0$.

9. Para cada uma das funções definidas pelas expressões seguintes, determine os pontos de continuidade e descontinuidade:

   a) $\frac{x+1}{x^3+x}$;

   b) $\frac{x+1}{x^4+3x^3+2x^2}$;

   c) $\sqrt{x} - \frac{1}{x^2+x}$;

   d) $\operatorname{sen}\left(\cos\sqrt{1-x^2}\right)$;

   e) $\cos\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

   f) $\sqrt[3]{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{cotg} 2x}$;

   g) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}$;

   h) $\frac{|x^2-1|}{x^2-1}$;

   i) $\sqrt{-\operatorname{sen}^2 x}$.

10. a) Mostre que se uma função é contínua em $\mathbb{R}$ e nula em todos o racionais, então a função é identicamente nula (ou seja, $f(x) = 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$).

    b) Se f e g estão definidas em $\mathbb{R}$ e coincidem nos racionais, têm que coincidir em $\mathbb{R}$? E se, por hipótese, ambas são contínuas?