Cálculo Diferencial e Integral I

LEIC-A , 2º semestre de 2008/09

Exercícios - Ficha 6 6 de Abril de 2009

---

1. Mostre que as seguintes séries são convergentes e calcule as somas:

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(\frac{2}{5})^{n-1} \quad e \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt[n+1]{n+1}-\sqrt[n]{n}).$$

2. Estude quanto à convergência as séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^3}{1+n!} \quad e \quad \sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{1+|x|})^n.$$

3. Determine a natureza das séries cujos termos de ordem n são:

$\frac{1}{n^3+4}$	$\frac{n}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$	$\frac{n\cdot 2^n}{e^n}$	$\frac{n!}{n^2+2^n}$
$\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$	$\frac{(n!)^2}{(2n)!}$	$\frac{2^n}{1+3^n}$	$\frac{n^{1000}}{(1{,}001)^n}$
$\frac{n!}{e^n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}\,\sqrt[3]{n+1}\,\sqrt[4]{n+2}}$	$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2n+1)}{3\cdot 6\cdot 9\cdot\ldots(3n+3)}$	$\frac{[(2n)!]^2}{n!(3n)!}$

4. Sendo a_n o termo geral de uma sucessão de termos positivos, indique, justificando, a natureza das séries:

$$\sum(1+a_n) \quad , \quad \sum\frac{1}{n^2+a_n} \quad e \quad \sum\frac{a_n}{1+a_n}.$$

5. Indique, justificando, se são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes as séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n^2}{n^2+1} \quad , \quad \sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{2+a^2})^n \quad (a\in\mathbb{R}).$$

   Calcule a soma das que forem convergentes.

6. Determine a natureza das séries

$$\sum\frac{\log n}{n} \quad , \quad \sum(-1)^n\frac{n}{n^2+1} \quad e \quad \sum\frac{n^3}{e^n}.$$

   No caso de convergência, indique se é simples ou absoluta.

7. Prove que são necessariamente verdadeiras ou mostre, por meio de exemplos, que podem ser falsas, as afirmações correspondentes às alíneas a), b) e c) seguintes. Sendo $\sum a_n$ uma série convergente de termos positivos, a série

$$a) \sum (-1)^n a_n \quad , \quad b) \sum \sqrt[n]{a_n} \quad , \quad c) \sum a_{2n+1}$$

é necessáriamente convergente.

8. Determine o raio de convergência da série de potências:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{n+1}$$

e indique, justificando, os valores reais de x para os quais a série é absolutamente convergente e aqueles para que é simplesmente convergente.

9. Determine o conjunto dos pontos em que é absolutamente convergente e o conjunto dos pontos em que é simplesmente convergente a série:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} (\frac{x-2}{x})^n.$$

10. Sendo k um número natural, determine o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{n(n+k)}$$

e calcule a soma da série no extremo superior do seu intervalo de convergência.