INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Cálculo Diferencial e Integral I

LEIC-A , 2º semestre de 2008/09

Exercícios - Ficha 5 30 de Março de 2009

---

1. Das sucessões de termos gerais

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad v_n = \frac{n^{n+1}}{n^n + 1}, \quad w_n = u_n v_n$$

indique, justificando abreviadamente as respostas, quais as que são limitadas e as que são convergentes.

2. Estude quanto à convergência as sucessões de termos gerais:

$$u_n = \cos(n!\pi), \quad v_n = \frac{n\cos(n\pi)}{2n+1}, \quad w_n = \frac{1+a^n}{1+a^{2n}} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

3. Mostre que se (u_n) é uma sucessão convergente tal que $u_{2n} \in]0,1[$ e $u_{2n+1} \in \mathbb{R}\setminus]0,1[$ então $\lim u_n \in \{0,1\}$.

4. Identifique os conjuntos dos sublimites em $\mathbb{R}$ (e em $\tilde{\mathbb{R}}$) da sucessão:

   (a) de termo geral $u_n = \dfrac{1}{n} + 2\cos n\pi$

   (b) $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

   Será possível o conjunto dos sublimites em $\mathbb{R}$ de uma sucessão (u_n) ser um conjunto singular e (u_n) ser divergente? Justifique. E se os sublimites e a convergência da sucessão forem considerados em $\tilde{\mathbb{R}}$?

5. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A_1 = [-1,1], \quad A_2 =]-1,+\infty[, \quad A_3 = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}_1 \right\}.$$

   Para cada conjunto, diga, se as proposições seguintes são verdadeiras ou falsas:

   (i) Toda a sucessão decrescente de termos em A_j (j= 1, 2, 3) é convergente.

   (ii) Toda a sucessão decrescente de termos em A_j é convergente para um elemento de A_j.

   (iii) Toda a sucessão estritamente crescente em A_j é divergente.

(iv) O conjunto dos sublimites de qualquer sucessão de termos em A_j é não-vazio.

(v) O conjunto dos sublimites de qualquer sucessão de termos em A_j está contido em $\{-1, 0\}$.

6. Sejam $A = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $B = \left\{-\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_1\right\}$. Diga, justificando, quais das seguintes proposições são verdadeiras:

   a) Toda a sucessão de termos em A que seja limitada é convergente.

   b) Qualquer sucessão monótona de termos em $A \cap V_{1/2}(0)$ tem limite real.

   c) Qualquer sucessão de termos em $A \cup B$ que seja estritamente decrescente tem limite em $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty]$.

7. Prove, recorrendo à definição de limite em $\tilde{\mathbb{R}}$ que

   a) $1 - \sqrt{n} \to -\infty$.

   b) $\frac{n^2+1}{n} \to +\infty$.

8. Determine, se existirem, os limites em $\tilde{\mathbb{R}}$ das sucessões que têm por termo de ordem n:

$$\begin{array}{cccc}
\frac{n^n}{1000^n} & \frac{(2n)!}{n!} & \sqrt[n]{\frac{n+2}{n+1}} & \frac{n^{1000}}{1.0001^n} \\
\sqrt[n]{\frac{n}{n^2+1}} & \sqrt[n]{3^n+2} & \sqrt[n]{n!} & \left(2-\frac{1}{n}\right)^n \\
\frac{3^n}{n^2} & \sqrt[n]{2^n+1} & \frac{n^3+1}{n^2+2n-1} & \frac{n^p}{n!} \\
\left(1-\frac{1}{n!}\right)^{n!} & \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} & \left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)^{2^n} & \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^2}
\end{array}$$

9. Decida sobre a existência dos seguintes limites em $\mathbb{R}$ e $\tilde{\mathbb{R}}$, calculando os seus valores nos casos de existência:

$$\begin{array}{ccccc}
\lim \frac{n!}{n^{1000}} & \lim \frac{(2n)!+2}{(3n)!+3} & \lim \frac{(2n)!}{(2n)^n} & \lim \frac{(n!)^2}{(2n)!+2} & \lim n^{\frac{1}{n}} \\
\lim \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} & \lim \left(\frac{1}{n}\right)^n & \lim \left(2-\frac{1}{n}\right)^n & \lim \left(\frac{n-1}{2n^2+1}\right)^{\frac{2}{n}} & \lim \frac{2^{(n^2)}}{15^n}
\end{array}$$

10. a) Mostre que:

      i) se $u_n \to +\infty$ em $\tilde{\mathbb{R}}$ então $\frac{1}{u_n} \to 0$,

      ii) se $u_n > 0$ e $u_n \to 0$ então $\frac{1}{u_n} \to +\infty$ em $\tilde{\mathbb{R}}$.

    b) Será verdade que $u_n \to 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{u_n} \to +\infty \vee \frac{1}{u_n} \to -\infty\right)$?