



# Cálculo Diferencial e Integral I

LEIC-A , 2º semestre de 2008/09

Exercícios - Ficha 2      9 de Março de 2009

---

1. Indique justificando quais das proposições seguintes são verdadeiras:

- a)  $\{1\} \subset \{1, \{2, 3\}\}$
- b)  $\{1\} \in \{1, \{2, 3\}\}$
- c)  $2 \in \{1, \{2, 3\}\}$
- d)  $1 \in \{\mathbb{R}\}$
- e)  $\emptyset = \{x \in \mathbb{N} : x = x + 1\}$
- f)  $\emptyset \in \{0\}$
- g)  $\emptyset \subset \{0\}$
- h)  $\forall_{x \in \mathbb{R}} x > 0 \Leftrightarrow x^{-1} > 0$
- i)  $\forall_{x \in \mathbb{R}} x > 1 \Leftrightarrow x^{-1} < 1$
- j)  $\forall_{x, y \in \mathbb{R}} x < y \Rightarrow y^{-1} < x^{-1}$
- k)  $\forall_{x \neq 0} x^2 > 0$
- l)  $\forall_{x, y \in \mathbb{R}} x < y \Rightarrow x^2 < y^2$
- m)  $\forall_{x, y \in \mathbb{R}} x < y < 0 \Rightarrow x^2 > y^2$

2. Verifique que  $\forall_{a > 0} a + \frac{1}{a} \geq 1$ . (Sugestão: considere separadamente  $a \geq 1$  e  $a < 1$ .)

3. Considere os seguintes subconjuntos de  $\mathbb{R}$  :

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x| \geq \frac{x}{2} + 2 \right\}, \quad B = [-3, 4], \quad C = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

- a) Mostre que  $A \cap B = [-3, -\frac{4}{3}] \cup \{4\}$ .
- b) Indique, se existirem em  $\mathbb{R}$ ,  $\sup A$ ,  $\min(A \cap B)$ ,  $\max(A \cap B)$ ,  $\inf(A \cap B \cap C)$ ,  $\sup(A \cap B \cap C)$  e  $\min(A \cap B \cap C)$ .

4. Considere os conjuntos  $A$  e  $B$  definidos por

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x \log x} > 0 \right\}, \quad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = -\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_1 \right\}.$$

Mostre que o conjunto  $A$  é igual a  $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ . Determine, caso existam, ou justifique que não existem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo dos conjuntos  $A$  e  $A \cup B$ .

5. Considere os seguintes conjuntos de números reais:

$$A = \left\{ x : \frac{x^2 - 1}{x} \geq |x - 1| \right\}, \quad B = \{x : \sin x = 0\}, \quad C = \mathbb{Q}.$$

- Mostre que  $A = [-\frac{1}{2}, 0[ \cup [1, +\infty[$ .
- Escreva os conjuntos dos majorantes e minorantes de  $A \cap C$  e  $B \cap C$ . Calcule ou conclua da não existência de  $\sup A$ ,  $\inf A \cap C$ ,  $\min A \cap C$ ,  $\min B$ ,  $\sup B \cap C$ .

6. Considere os seguintes subconjuntos de  $\mathbb{R}$ :

$$A = \left\{ x : \frac{x^2 - 2}{|x| - 1} \leq 0 \right\}, \quad B = \{2^{n/2} : n \in \mathbb{N}_1\}.$$

- Mostre que  $A = [-\sqrt{2}, -1[ \cup ]1, \sqrt{2}]$ .
- Determine ou justifique que não existem, os supremo, máximo, ínfimo e mínimo de cada um dos conjuntos  $A \cap \mathbb{Q}$ ,  $B$  e  $B \cap \mathbb{Q}$ .

7. Seja  $A$  um subconjunto de  $\mathbb{R}$ , majorado e não vazio, e seja  $m$  um majorante de  $A$ , distinto do supremo desse conjunto. Mostre que existe  $\epsilon > 0$  tal que  $V_\epsilon(m) \cap A = \emptyset$ .

8. Sejam  $A$  e  $B$  dois subconjuntos de  $\mathbb{R}$  tais que  $A \subset B$  e suponha que  $A$  é não vazio e  $B$  é majorado. Justifique que existem os supremos de  $A$  e  $B$  e prove que se verifica  $\sup A \leq \sup B$ .

9. Sendo  $U$  e  $V$  dois subconjuntos majorados e não vazios de  $\mathbb{R}$ , tais que  $\sup U < \sup V$ , justifique (de forma precisa e abreviada) as afirmações seguintes:

- Se  $x \in U$ , então  $x < \sup V$ .
- Existe pelo menos um  $y \in V$  tal que  $y > \sup U$ .

10. Sejam  $A$  e  $B$  dois subconjuntos de  $\mathbb{R}$ .

- Prove que, se  $\sup A < \inf B$ ,  $A$  e  $B$  são disjuntos.
- Mostre, por meio de exemplos, que se for  $\sup A > \inf B \wedge \sup B > \inf A$ ,  $A$  e  $B$  podem ser ou não disjuntos.

Mais exercícios: Ver:

[1] J. Campos Ferreira. Introdução à Análise Matemática, Fundação Calouste Gulbenkian, 8ª ed., 2005.

[2] Exercícios de Análise Matemática I e II, IST Press, 2003.