



Cálculo Diferencial e Integral I

LEIC-A , 2º semestre de 2008/09

Exercícios - Ficha 14

8 de Junho de 2009

1. Calcule

$$\text{a) } \int_1^2 \frac{1}{x} dx \quad \text{b) } \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx \quad \text{c) } \int_{\frac{1}{2}}^1 \log x dx \quad \text{d) } \int_{-1}^1 \sqrt[3]{x} dx$$

2. Determine as derivadas das funções seguintes:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int_1^x \sin(t^2) dt, & \text{b) } & \int_x^{2\pi} \cos(t^2) dt, \\ \text{c) } & \int_x^{2x} e^{t^2} dt, & \text{d) } & \int_x^{x^2} e^{-t^2} dt, & \text{e) } & \int_{x^2}^{x^4} \sin(\sqrt{t}) dt. \end{aligned}$$

3. Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções integráveis em qualquer intervalo limitado e com a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned} \int_{-x}^x f(t) dt &= 2 \int_0^x f(t) dt \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ \int_{-x}^x g(t) dt &= 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1}$$

- Mostre que se f é par e g é ímpar então verificam (1).
- Mostre que se f e g são contínuas e verificam (1) então f é par e g é ímpar.
- Forneça exemplos de funções f e g que verificam (1) e que não sejam par nem ímpar, respectivamente.

4. Calcule

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int_0^\pi \sin^3 u du, & \text{b) } & \int_0^{\pi/3} \frac{\sin 2x}{1 + \sin^4 x} dx, \\ \text{c) } & \int_0^1 \log(1 + \sqrt{x}) dx, & \text{d) } & \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} \arctan x dx. \end{aligned}$$

5. Calcule os limites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \int_{\pi/2}^{\arctan x} \sin(t^2) dt, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} t e^{\sqrt{t}} dt}{\int_0^{x^3} (e^{\sqrt[3]{t}} - 1) dt}.$$

6. Relembre que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se periódica de período $T > 0$, sse $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x + T)$. Mostre que, se f é contínua e periódica de período $T > 0$, então

$$F(x) = \int_x^{x+T} f(t) dt$$

é uma função constante em \mathbb{R} .

7. Mostre que, para qualquer $x > 0$,

$$\int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_{1/x}^1 \frac{1}{1+t^2} dt.$$

(**Sugestão:** use uma substituição de variável adequada.)

8. Determine o domínio, intervalos de monotonia e extremos locais das funções:

a) $f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt,$

b) $g(x) = \int_2^{e^x} \frac{1}{\log t} dt.$

9. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - e^x}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

a) Justifique integrabilidade da função f , em qualquer intervalo limitado de \mathbb{R} ,

b) Definindo $\Psi(x) = \int_0^x f(s) ds$, justifique que se trata de uma função diferenciável em \mathbb{R} , e calcule $\Psi'(x), x \in \mathbb{R}$.

10. Seja $a > 1$ e A o conjunto de pontos $P(x, y)$ cujas coordenadas verificam as condições:

$$0 \leq y \leq \log x \quad \text{e} \quad x \leq a.$$

a) Calcule a área de A ;

b) Calcule o comprimento da linha que "limita" o conjunto A (formada por um arco de curva e dois segmentos de recta).