Cálculo Diferencial e Integral I

LEIC-A , 2º semestre de 2008/09

Exercícios - Ficha 12   25 de Maio de 2009

---

1. Prove que, se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifica a condição

$$f^{(n)}(x) = 0 \qquad \texttt{para qualquer} \qquad x \in \mathbb{R}\ ,$$

então f é um polinómio de grau menor que n .

2. De que ordem é o contacto das funções definidas por

$$f(x) = e^x \qquad\qquad \texttt{e} \qquad\qquad g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

no ponto 0 ?

3. a) Determine o raio de convergência da série de potências

$$\sum \frac{(x-1)^n}{3^n\sqrt{n}}$$

e indique, justificando, em que dos pontos a série converge absolutamente e em que pontos converge simplesmente.

b) Supondo que a função g é definida pela igualdade

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n\sqrt{n}}$$

no conjunto de todos os pontos em que a série é convergente, calcule $g(1)$ e $g''(1)$ e escreva a série de Taylor, no ponto 1 , da função $x + g'(x)$.

4. Desenvolva em série de Mac-Laurin a função

$$\varphi(x) = x\log(1 + x^3)$$

e aproveite o desenvolvimento para justificar que a função tem um mínimo no ponto 0 .

Sugestão: Pode ser útil usar a fórmula conhecida

$$\log(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

Mostre que $\varphi'(0) = \varphi''(0) = \varphi'''(0) = 0$ e observe o sinal de $\varphi^{(4)}$.

5. Calcule uma primitiva de cada uma das funções:

a) $\sqrt{2x} + \sqrt{\dfrac{x}{2}}$, b) $3 \operatorname{sen} x + 2x^2$, c) $\dfrac{x^2}{1+x^3}$,

d) xe^{-x^2}, e) $\dfrac{3 \operatorname{sen} x}{(1+\cos x)^2}$, f) $x\sqrt{1+x^2}$,

g) $e^{2 \operatorname{sen} x} \cos x$, h) $\dfrac{1}{1+e^x}$, i) $\operatorname{tg} x$,

j) $\dfrac{1}{2+x^2}$, l) $\operatorname{tg}^2 x$, m) $\cos^3 x \operatorname{sen}^3 x$,

n) $\dfrac{1}{(1+x^2)\arctan x}$, o) $\dfrac{x}{1+x^4}$, p) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$,

q) $\dfrac{1}{1+3x^2}$, r) $\dfrac{e^x}{e^{2x}+4}$, s) $\sqrt{\dfrac{\operatorname{arcsen} x}{1-x^2}}$,

t) $\dfrac{x}{\sqrt{1-2x^4}}$, u) $\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$, v) $\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

6. Calcule uma primitiva de cada uma das funções:

a) $\dfrac{x^2+1}{x^2(x-1)}$, b) $\dfrac{x^5}{x^2-1}$, c) $\dfrac{x}{(x+1)(x+2)^2}$,

d) $\dfrac{x^3+2x^2+2x}{(x+1)^2}$, e) $\dfrac{x^4}{x^4-1}$, f) $\dfrac{x^3+4x^2-4x}{x^4-16}$.

7. Determine *todas* as primitivas de cada uma das funções do exercício anterior (nos respectivos domínios).

8. Determine a função $\psi :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ que satisfaz as condições

$$\psi''(x) = \frac{1}{1+x} \quad \texttt{para} \quad x > -1,$$

$$\psi(0) = \psi'(0) = 1.$$