Cálculo Diferencial e Integral I

LEIC-A , 2º semestre de 2008/09

Exercícios - Ficha 11 **18 de Maio de 2009**

---

1. Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} e^x + \alpha x + \beta & \text{se } x \leq 0 \\ \operatorname{arctg}\left(e^x + e^{-x} - 1\right) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

onde α e β são constantes reais.

a) Determine α e β sabendo que g tem derivada finita em $x = 0$. (Se não conseguir responder a esta pergunta, use $\alpha = -1$ e $\beta = 4$ nas alíneas seguintes.)

b) Determine $\lim_{x\to-\infty} g(x)$, $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

c) Estude g quanto à diferenciabilidade e calcule g' nos pontos onde existir.

d) Estude g quanto à existência de extremos e intervalos de monotonia.

e) Determine o contradomínio de g.

2. Seja g uma função diferenciável tal que $g(0) = g'(0) = 0$ e g' é uma função estritamente monótona. Define-se

$$\varphi(x) = 2\operatorname{tg}\left(g(x)\right) - g(x).$$

Mostre que $\varphi(0)$ é um extremo local de φ.

3. Calcule os limites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$,

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+e^x)}{x}$,

c) $\lim_{x\to 1}(\log x \cdot \log\log x)$,

d) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}$,

e) $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-1/x}}{x}$,

f) $\lim_{x\to 1^+} x^{\log\log x}$,

g) $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x-1}}$,

h) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}$.

4. Calcule os limites

   a) $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$,

   b) $\lim_{x\to +\infty} (\log x)^{\frac{1}{x}}$,

   c) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$,

   d) $\lim \left(\frac{1}{n}\right)^{\operatorname{sen} \frac{1}{n}}$ (Sugestão: determine primeiro $\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x}$).