



Cálculo Diferencial e Integral I

LEIC-A , 2º semestre de 2008/09

Exercícios - Ficha 10 11 de Maio de 2009

1. Prove que se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é duas vezes diferenciável e o seu gráfico cruza a recta $y = x$ em três pontos, então f'' tem pelo menos um zero.
2. Prove que a equação $3x^2 - e^x = 0$ tem exactamente três zeros.
3. Prove que se $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável e satisfaz $f(n) = (-1)^n$, para $n \in \mathbb{N}$, então a sua derivada não tem limite no infinito.
4. Seja f uma função diferenciável em \mathbb{R} tal que $f(0) = 0$ e cuja derivada é uma função crescente. Mostre que a função definida por $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ é crescente em \mathbb{R}^+ . (Sugestão: Aplique o Teorema de Lagrange a f num intervalo adequado para mostrar que $g'(x) \geq 0$.)
5. Determine intervalos de monotonia, extremos locais e extremos absolutos (se existentes) para as funções:
 - a) $\frac{x}{x^2+1}$,
 - b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$,
 - c) $|x^2 - 5x + 6|$,
 - d) $x \log x$,
 - e) e^{-x^2} ,
 - f) $\frac{e^x}{x}$,
 - g) xe^{-x} ,
 - h) $\arctg x - \log \sqrt{1+x^2}$.
6. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|e^{-\frac{x^2}{2}}$.
 - a) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - b) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule f' .
 - c) Determine os intervalos de monotonia e, se existirem, pontos de extremo, classificando-os quanto a serem máximos, mínimos, relativos ou absolutos.
 - d) Determine, justificando, o contradomínio de f .