Cálculo Diferencial e Integral I

LEIC-A , 2º semestre de 2008/09

2º Exame 8 de Julho de 2009

Resolva, ainda que parcialmente, os problemas propostos em 5 dos 7 grupos. Duração: 3 horas

---

I. 1. Considere os conjuntos A e B definidos por

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \, : \, \frac{x \log x}{x-1} > 0 \right\} \quad , \quad B = \left\{ x \in \mathbb{R} \, : \, x = -\frac{1}{n^2} \, , n \in \mathbb{N}_1 \right\}.$$

Mostre que o conjunto A é igual a $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Determine, caso existam, ou justifique que não existem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo dos conjuntos A e $A \cup B$.

2. Escreva o seguinte conjunto como reunião de três intervalos:

$$C = \{x \in \mathbb{R} : \left|x^2 - 1\right| > |x+1|\}.$$

3. Demonstre pelo princípio de indução matemática que

$$2 + 4 + 6 + ... + 2n \; = \; n^2 + n \quad \texttt{para} \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

II. 1. Calcule, justificando, o limite em $\widetilde{\mathbb{R}}$ para cada uma das sucessões de termo geral

$$a_n \; = \; \frac{\sqrt[n]{n} + \pi^n}{\pi^{n+1} + n^2} \; , \; b_n \; = \; \frac{\sqrt[6]{n}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}} \; , \; c_n \; = \; (1 + \frac{1}{n^2})^n \; .$$

2. Dê um exemplo de uma sucessão (x_n) não monótona que tem termos em $]0, 7[$ e converge para 7 .

3. Estude quanto à convergência as sucessões de termos gerais:

$$u_n = \frac{e^n \cos(n\pi)}{e^n + 1}, \quad v_n = \cos(n!\pi), \quad w_n = \frac{(-1)^n}{\log \frac{1}{n}} \, .$$

III. 1. Calcule as somas:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} \quad , \quad \sum_{n=2}^{+\infty} b_n = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad , \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{n!} \, .$$

2. Determine o conjunto dos pontos em que é absolutamente convergente e o conjunto dos pontos em que é simplesmente convergente a série:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{\sqrt{n} \cdot 3^n}.$$

IV. Considere as funções f e g definidas em $]0,+\infty[$ pelas expressões

$$f(x) = \log\log(1+x^2) \qquad , \qquad g(x) = x^{1/2}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}\,.$$

a) Estude f e g quanto à continuidade.

b) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

c) Indique, justificando, se cada uma das funções é prolongável por continuidade ao ponto 0.

d) Indique, justificando, o contradomínio de f.

V. 1. Calcule os limites (em $\widetilde{\mathbb{R}}$):

$$a)\ \lim_{x\to 0^+} x\log x^2 \ \ ,\ \ b)\ \lim_{x\to+\infty} x\log x^2 \ .$$

2. Determine os intervalos de monotonia e extremos locais (se existentes) para a função:

$$F(x) = \begin{cases} x\log x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

VI. 1. Calcule todas as primitivas de

$$\varphi(x) = \sqrt{x}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{x} \quad , \quad x \in \mathbb{R}^+\,.$$

2. Determine a função $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz as condições

$$\psi''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \quad \texttt{para} \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\psi'(0) = 1 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \psi(x) = \pi\,.$$

VII. 1. Calcule as derivadas das funções seguintes indicando os domínios:

$$F(x) = \int_0^x \mathrm{sen}\,t^3\,dt \ \ , \quad G(x) = \int_{x^2}^{x^4} e^{-\sqrt{t}}\,dt.$$

2. Calcule os limites:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x \mathrm{sen}\,t^2\,dt \ \ ,\ \ b)\ \lim_{x\to+\infty} x\int_{\pi/2}^{\mathrm{arctg}\,x} \cos^2 t\,dt \ .$$