Cálculo Diferencial e Integral I

LEIC-A , 2º semestre de 2008/09

1º Exame 24 de Junho de 2009

Resolva, ainda que parcialmente, os problemas propostos em 5 dos 7 grupos. Duração: 3 horas

---

I. Considere os dois conjuntos

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x+1}{x^2+1} \leq 1 \right\}, \qquad B = \left\{ \; x \in \mathbb{R} : \log \sqrt{x} \leq 0 \right\}.$$

1. Mostre que
$$A =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\;, \qquad B =]0, 1].$$
2. Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, $\sup(A \cap B)$, $\inf(A \cup B)$, $\max(B \setminus \mathbb{Q})$, $\min(A \cap \mathbb{Q})$, $\max(A \cap B \cap \mathbb{Q})$ ou justifique a não existência, respectivamente.
3. Dê exemplos de sucessões (a_n) , (b_n) , (c_n) tais que
   a) (a_n) tem termos em A, é estritamente crescente e converge para 0,
   b) (b_n) tem termos em A, é crescente e divergente,
   c) (c_n) tem termos $c_{2n} \in A$, $c_{2n+1} \in B$ e tal que $c_n \to c \neq 1$ se $n \to +\infty$.

II. 1. Justifique que, se as condições

$$x_n > 0 \quad \text{e} \quad \frac{2x_{n+1}}{x_n} \leq 1$$

são verificadas qualquer que seja $n \in \mathbb{N}_1$, então a sucessão (x_n) é convergente.

2. Determine, se existirem, os limites em $\tilde{\mathbb{R}}$ das sucessões que têm por termo de ordem n:

$$a)\ u_n = n^{\pi} (\frac{\pi}{2})^n \ , \ b)\ v_n = \sqrt[n]{e^n + n^e} \ , \ c)\ w_n = \left(1 + \frac{1}{\log n}\right)^{\log(n^2)} .$$

3. Identifique os conjuntos dos sublimites em $\tilde{\mathbb{R}}$ das sucessões de termo geral:

$$a)\ x_n = \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} + \frac{n}{n+1} \ , \ b)\ y_n = e^{(-1)^n \cdot n} \ , \ c)\ z_n = \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} n\right)^n .$$

III. 1. Determine a natureza das séries cujos termos de ordem n são:

$$a)\ a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \quad , \quad b)\ b_n = \frac{n^2 e^n}{3^n} \qquad c)\ c_n = (-1)^n \log \frac{n+1}{n} .$$

2. Desenvolva em série de Mac-Laurin a função

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

e aproveite o resultado para calcular a série de Mac-Laurin da função $F(x) = \log(1+x^2)$.
Sugestão: Use a fórmula da soma de $1 - x^2 + x^4 - +...$ e pense na derivada de F.

IV. Considere a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x^2 & \text{se } x < 0 \\ e^x - 1 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

a) Justifique que φ é contínua em qualquer ponto de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Calcule os limites laterais de φ no ponto 0, e indique, justificando, se φ é contínua, contínua à direita ou contínua à esquerda nesse ponto.

c) Calcule $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x)$.

d) Determine os intervalos de monotonia e os extremos relativos de φ.

e) Indique, justificando, o contradomínio de φ.

V. 1. Para cada uma das seguintes funções determine o domínio de diferenciabilidade e calcule as respectivas derivadas:

$$a)\ f(x) = x\log(1+x^2) + 2\operatorname{arctg} x \quad , \quad b)\ g(x) = (\operatorname{sen} x)^{\cos x} \quad .$$

2. Prove que a equação $e^x - 6x^2 = 0$ tem exactamente três zeros.

VI. Determine, utilizando métodos de primitivação adequados, uma primitiva de cada uma das seguintes funções, indicando um intervalo possível:

$$a)\ x^3 e^{x^4} \quad , \quad b)\ e^x \operatorname{sen} x \quad , \quad c)\ \log\frac{x+1}{x} \quad , \quad d)\ \frac{x+1}{x^2-1} \quad .$$

VII. 1. Calcule os valores dos integrais:

$$a)\ \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx \quad , \quad b)\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx \quad , \quad c)\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos^2 x \, dx \quad .$$

2. Calcule as derivadas das funções seguintes indicando os domínios:

$$a)\ F(x) = \int_0^x \operatorname{arcsen} t \, dt \quad , \quad b)\ G(x) = \int_{-x^2}^{x^2} t\log(1+t^2)\, dt.$$